1 放射線崩壊の法則

放射線崩壊の法則はruthertfordとsoddyによって実験的に確立された。サンプルは時間によって指数的に崩壊する。
量子力学によると原子核崩壊過程は黄金律 (遷移確率/時間) に由来し、定数λによって特徴づけられる。
もし崩壊モードが一つ以上ならば、λは各モードの総和

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots$$

N個の崩壊核のサンプルでは

$$dN = -\lambda N dt \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow N(t) = N(0)\exp(-\lambda t) = N(0)\exp(-t/\tau_m)(\tau_m = \frac{1}{\lambda}) \tag{2}$$

ここでNは十分に大きく、したがって時間において連続 (微分可能) とする。

半減期$T_{1/2}$は

$$\frac{1}{2} = \exp(-\lambda T_{1/2}) \Leftrightarrow T_{1/2} = \frac{1}{\lambda}\log 2 = \tau_m \log 2$$

2 放射線のゆらぎ

放射減衰の法則では半減期に比べて短い時間Δtの間の放射能は一定のはずだが、繰り返し測定すると不確定性原理により揺らぎが観測される。
揺らぎはポアソン分布をとる。Δtの間の崩壊数がnと観測される確率$P($n ,$\Delta t)$は

$$P(n, \Delta t) = \frac{m^n}{n!}\exp(-m)$$

mは繰り返し観測した結果を平均した崩壊数。

標準偏差σは

$$\sigma = \sqrt{m}$$

例1　ある事象は5秒間で900回観測された。この時 m = 900 , $\Delta t = 5$

$$\sigma = \sqrt{900} = 30$$

1 秒に観測される割合は

$$(900 \pm 30)/5 = (180 \pm 6)cts/s$$

例 2 ある弱い放射線源は平均 1cts/s とわかっている。

1)4 秒で全く崩壊が観測されない確率は、$\Delta t = 4$ m = 4 としてポアソン分布に代入すると

$$P = 4^0 \frac{\exp(-4)}{0!} = 0.0183$$

2)4 秒で 1 だけ観測される確率は

$$P = 4^1 \frac{\exp(-4)}{1!} = 0.0733$$

3 放射性崩壊の連鎖

連鎖的に崩壊する場合

$$A_{不安定} \rightarrow B_{不安定} \rightarrow C_{安定}$$

$$\begin{cases} \frac{dN_a}{dt} = -\lambda_a N_a \\ \frac{dN_b}{dt} = \lambda_a N_a - \lambda_b N_b \\ \frac{dN_c}{dt} = -\lambda_b N_b \end{cases} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_a = N_a(0)\exp(-\lambda_a t) \\ N_b = N_a \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a}[\exp(-\lambda_a t) - \exp(-\lambda_b t)] \\ N_c = N_a[1 + \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a}[\lambda_a \exp(-\lambda_b t) - \lambda_b \exp(-\lambda_a t)]] \end{cases} \tag{4}$$

fig.1.7 より N_b は max となるような t があり

$$t_{max} = \frac{\log \frac{\lambda_b}{\lambda_a}}{\lambda_b - \lambda_a}$$

このとき

$$\lambda_b N_b(t_{max}) = \lambda_a N_a(t_{max})$$

0070907

散乱断面積は

$$
\begin{cases}
\sigma(\ ^{63}Cu \rightarrow\ ^{64}Cu) = 4.4barns = 4.4 \times 10^{-24}cm^2 \\
\sigma(\ ^{64}Cu \rightarrow\ ^{66}Cu) = 2.2barns = 2.2 \times 10^{-24}cm^2
\end{cases}
$$

半減期はそれぞれ 12.7 時間と 5.1 分。
$F = 10^9 cm^{\overset{2}{\cancel{-1}}} s^{-1}$ の中性子を当てると

$$
\lambda_a = F\sigma = \begin{cases}
10^9 \times (4.4 \times 10^{-24}) = 4,4 \times 10^{-15} s^{-1}\ (\ ^{64}Cu) \\
10^9 \times (2.2 \times 10^{-24}) = 2.2 \times 10^{-15} s^{-1}\ (\ ^{66}Cu)
\end{cases}
$$

の割合で ^{64}Cu と ^{66}Cu が生成され

$$
\lambda_b = \frac{1}{\tau_m} = \begin{cases}
\frac{\log(2)}{12.7} = 0.054h^{-1}\ (\ ^{64}Cu) \\
\frac{\log(2)}{5.1} = 0.136min^{-1}\ (\ ^{66}Cu)
\end{cases}
$$

の割合で崩壊する。
t 秒後のそれぞれのアイソトープの放射能は、$\lambda_a \ll \lambda_b, \lambda_a t \ll 1$ として

$$
\lambda_B N_b \sim N_a(0)\lambda_a[1 - \exp(-\lambda_b t)]
$$

$$
N_a(0) = (6.02 \times 10^{23}/A) \times (\text{存在量}) \times (1g)
$$

よって 15 分照射した場合

$$
\lambda_B N_b(15min) = \begin{cases}
3.86 \times 10^5 Bq = 10.43\mu Ci\ (\ ^{64}Cu) \\
5.62 \times 10^6 Bq = 152\mu Ci\ (\ ^{66}Cu)
\end{cases}
$$

$$
t_{max} = \begin{cases}
16.8days\ (\ ^{64}Cu) \\
3.4h\ (\ ^{66}Cu)
\end{cases}
$$

a0070907

式 (4) より

$$\frac{\lambda_b N_b}{\lambda_a N_a} = \frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a}[1 - \exp(-(\lambda_b - \lambda_a)t)]$$

1) $\lambda_a \gtrsim \lambda_b$

t とともに増大

2) $\lambda_b \gtrsim \lambda_a$

t が大きくなると一定値（$\frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a}$〉1) となる。これを過渡平衡という。

3) $\lambda_b \gg \lambda_a$

速やかにおよそ 1 に収束。これを~~スカラー~~平衡という。
sculay

例

$$^{90}Sr \rightarrow {}^{90}Y \rightarrow {}^{90}Zr$$

式 (4) に代入すると右辺第二項は無視できる。すると実質 Y(90) の半減期は 28 年と見なせる。

4 放射線による放射性同位体の生成

$$A(x,y)B \rightarrow C$$

上の反応は、A 核に x が入射するとが B 核が生成され、不安定になった B は y を出しながら λ_b によって C に崩壊するという意味である。
x のフラックスを F、x と A の散乱断面積を σ とすると

$$\frac{dN_a}{dt} = -F\sigma N_a = -\lambda_a N_a \quad (5)$$

$$\frac{dN_b}{dt} = -\lambda_b N_b + \lambda_a N_a \quad (6)$$

これは以前の議論と酷似。

例

$$Cu \begin{cases} ^{63}Cu(69\ \text{パーセント}) \\ ^{65}Cu(31\ \text{パーセント}) \end{cases}$$

熱中性子を当てると

$$\begin{cases} ^{63}Cu \rightarrow {}^{64}Cu \\ ^{65}Cu \rightarrow {}^{66}Cu \end{cases}$$