2.2.1 ボーアの計算（古典的な場合）

いくらかの物質媒体を電荷 ze、質量 M、速度 v の重粒子（バリオン）が通ることを考える。粒子軌道から b の位置に電子があるとする。その電子ははじめ静止している自由電子とする。さらに、重粒子と相互作用する間だけわずかに動くとする。また、衝突後、その入射粒子は電子よりも質量がはるかに大きいために、（$M \gg m_e$）元の軌道から脱することはないとする。これは電子が重粒子から ~~分裂してできる~~ 分離して考えることの1つの理由になっている。

電子から受けとるエネルギーを計算してみる。それは重粒子との衝突によって受けとる衝突モーメントを見つけることによってわかる。

$$I = \int F dt = e\int E_\perp dt = e\int E_\perp \frac{dt}{dx} dx = e\int E_\perp \frac{dx}{v} \quad (2.16)$$

$\int E_\perp dx$ を計算するためにガウスの法則を使う。すると、

$$\int E_\perp 2\pi b \, dx = 4\pi ze \quad , \quad \int E_\perp dx = \frac{2ze}{b} \quad (2.17)$$

よって、

$$I = \frac{2ze^2}{bv} \quad (2.18)$$

そして、電子から与えられるエネルギーは

$$\Delta E(b) = \frac{I^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^4}{m_e v^2 b^2} \quad (2.19)$$

電荷密度を N_e とする。それから、厚さ dx で b から $b+db$ の間にあるすべて電子のエネルギー損失は、

$$-dE(b) = \Delta E(b) N_e dV = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \frac{db}{b} dx \quad (2.20)$$

（体積要素 $dV = 2\pi b \, db \, dx$）

全エネルギー損失を得るために $b=0$ から $b=\infty$ まで積分するのだが、これは先の仮定とは反している。例えば、bがとても大きいとき、短時間で衝突が起こることはないだろう、その結果、この計算は有效にならないだろう。$b=0$ のときは (2.19)式から導けるエネルギーがとても大きくなってしまうので、この計算は有効にならない。よって、(2.20)の積分は (2.19)をみたす極限 bmix と bmax から成る。すなわち、

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{4\pi z^2e^4}{m_e v^2}N_e\ln\frac{b_{max}}{b_{min}} \qquad (2.21)$$

ここで、bminとbmaxの値を見積もる。古典的に考えると、譲渡可能な最大のエネルギーは正面衝突した場合であり、電子は $\frac{1}{2}m_e(2v)^2$ のエネルギーを持っている。もし相対性理論を考慮にいれると、このエネルギーは $2\gamma^2 m_e v^2$ ($\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta=v/c$) となる。(2.19)から、

$$\frac{2z^2e^4}{m_e v^2 b_{min}^2}=2\gamma^2 m v^2, \quad b_{min}=\frac{ze^2}{\gamma m_e v^2} \qquad (2.22)$$

bmaxの場合を考える。電子は自由ではなくいくらかの軌道周波数νを持った原子と結合している。電子がエネルギーを吸収するために、通過する粒子によって引き起こされる振動が束縛電子の $\tau=1/\nu$ に比べて短時間で起こらなければならない。そうでなければ、その振動は断熱的でエネルギーが移動しない。これを断熱不変性の原理という。衝突の典型的な相互作用時間は $t\simeq b/v$ であり、相対論的には $t\Rightarrow t/\gamma=b/(\gamma v)$ となり、その結果、

$$\frac{b}{\gamma v}\leq\tau=\frac{1}{\bar{\nu}} \qquad (2.23)$$

様々な周波数νとの束縛電子状態がいくらか存在するので、ここでは平均周波数$\bar{\nu}$を用いる。これはすべての束縛状態の平均である。すると、bmaxは

$$b_{max}=\frac{\gamma v}{\bar{\nu}} \qquad (2.24)$$

(2.22), (2.24) から (2.21) に b_{max} b_{min} を代入して、

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln \frac{\gamma^2 m v^3}{z e^2 \bar{\nu}} \qquad (2.25)$$

これは本質的にボーアの古典的な計算である。これがα粒子や重い原子核のような重粒子のエネルギー損失に対する合理的な説明を与えることができる。しかしながら、軽い粒子、例えば陽子の場合、この式は量子効果によって成立しない。それは荷電粒子による電子衝突損失のすべての本質的な特徴を含んでいる。

2.2.2 ベーテブロッホの式

移行

正しい量子力学的な計算においてはエネルギー伝達は衝突パラメータというよりむしろ、運動量移動の観点からパラメータ化されている。もちろん、これはより現実的である。というのも、運動量移動は測定可能な量なのに対し、衝突パラメータは測定可能な量ではないからである。ベーテらによって得られた式は、

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2 m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2}\right) - 2\beta^2\right] \qquad (2.26)$$

(ベーテブロッホの式)

補正

この式はエネルギー損失の計算に使用される基本的な表現である。実際には、2つ修正が加えられる。

補正

δ：密度効果~~修正~~，C：殻~~修正~~

これを加えると、(2.26)式は次のようになる。

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2 m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2}\right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z}\right] \qquad (2.27)$$

($2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 = 0.1535\ \mathrm{MeV\,cm^2/g}$)

r_e：古典的電子半径

m_e：電子質量

N_a：アボガドロ定数

I：励起ポテンシャル

Z：吸収物質の原子番号

A：吸収物質の原子量

ρ：吸収物質の密度

z：eの単位での入射粒子の電荷

$\beta = v/c$ (入射粒子)

$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

W_{max}：単一衝突での最大エネルギー輸送

移行　　　　　　　　　同値の or

最大エネルギー輸送は 正面衝突 ~~あるいは 連鎖衝突~~ によって作られている。
入射粒子の質量を M とすると、運動学は以下のように与えられる。

$$W_{max} = \frac{2 m_e c^2 \eta^2}{1 + 2s\sqrt{1+\eta^2} + s^2} \qquad (2.28)$$

$$(s = m_e/M \ , \ \eta = \beta\gamma)$$

もし、$M \gg m_e$ ならば、 $W_{max} \simeq 2 m_e c^2 \eta^2$

◎ 平均励起ポテンシャル (I)

これはベーテブロッホの式で主要なパラメータであり、平均軌道周波数 $\bar{\nu}$ である。
また、理論的にはいわゆる原子レベルの振動子強度によって加重された ν の対数平均である。実際には、これは計算するのがとても難しい量なのである。
というのも、振動子強度がほとんどの物質で知られていないからである。
代わりに、いくらかの物質の I の値が dE/dx の実測と半経験的な式 (I; Z の点をフィットしたもの) から推定されている。その式とは

$$\frac{I}{Z} = 12 + \frac{7}{Z}\ \mathrm{eV} \qquad Z < 13$$

$$\frac{I}{Z} = 9.76 + 58.8\, Z^{-1.19}\ \mathrm{eV} \qquad Z \geq 13 \qquad (2.29)$$

実際には、I は Z とともにもっと複雑に変化する。特に、特定の原子殻が閉じているために起こる不規則性が存在する。I を改善した値で示したものが表の 2.7 である。

◎ 殻および密度修正

密度効果は、粒子の電場もまたその軌道に沿って原子を分極する傾向があるという事実から生じている。その分極によって、粒子の軌道からはほど遠い電子が完全に電界から遮へいされる。これら外側にある電子と衝突が起こると、ベーテブロッホの式で予測されるよりも総エネルギー損失が少なくなる。この効果は(2.24)式のb_{max}の表現から見られるように、粒子エネルギーの増加に伴ってより重要になっていきます。速度vが増加するにつれて積分を行うときの半径bも増加するので、粒子から遠い電子の衝突はよりいっそう合計エネルギー損失に影響することになる。さらに、より高い密度を持つ物質の方が誘導/分極するので、密度もこの効果に影響することになる。図2.3はベーテブロッホの式に修正を加えたものとそうでないものを比較したものである。

δの値はシュテルンハイマーの式から与えられて、

$$\delta = \begin{cases} 0 & X < X_0 \\ 4.6052X + C_0 + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ 4.6052X + C_0 & X > X_1 \end{cases} \qquad (2.30)$$

$(X = \log_{10}(\beta\gamma))$

X_0, X_1, C_0, a, mは吸収物質に依存していて、C_0は次のように定義される。

$$C_0 = -\left(2\ln\frac{I}{h\nu_p} + 1\right) \qquad (2.31)$$

ここで、$h\nu_p$はいわゆる物質のプラズマ周波数であり、

$$\nu_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\pi m_e}} = \sqrt{80.617\times10^6 cm^3 N_e}\ Hz \qquad (2.32)$$

$(N_e = N_a \rho Z/A\ ,\ N_e$: 電子密度$)$

残りの定数は実験データをfitすることで決定される。表2.1にいくつかの物質の値が示されている。

殻修正は束縛電子の軌道速度以下の速度を入射粒子が持ったときに起こる効果を考慮している。そのようなエネルギーにおいては、電子に対して静止している入射粒子という仮定はもはや有効でなく、ベーテブロッホの式は成立しない。なので、図2.3を見れば分かるように、この修正は一般的には小さい。この修正に対して実証的な式は、$\eta \geq 0.1$において、

$$C(I,\eta) = (0.422377\eta^{-2} + 0.0304043\eta^{-4} - 0.00381 06\eta^{-6}) \times 10^{-6} I^{2} + (3.850190\eta^{-2} - 0.1667989\eta^{-4} + 0.00157955\eta^{-6}) \times 10^{-9} I^{3} \qquad (2.33)$$

($\eta = \beta\gamma$ と I は平均励起ポテンシャルである)

● 他の~~修正~~補正

よりベーテブロッホの式の精度を上げるには、修正をいくつか加える必要がある。その修正とは、~~発射のための~~無限の質量と近似していたことに起因するもの、超相対論的速度、高次QED課程、散乱断面積の高次の項、粒子の内部構造による修正、スピン効果、そしてとても遅い速度での電子捕獲である。重イオンにおける電子捕獲を除いて、これらの影響は1%以内で~~無視できる~~。素粒子においては、ベーテブロッホの式(殻と密度の修正を加えたもの)は十分以上の精度で正しいである。

最小電離 mip(minimum ionizing particle)

2.2.3 エネルギー依存性

図 2.4 にいくつかの異なる粒子における dE/dx のエネルギー依存性を Bethe-Bloch の式によって表してある。非相対論的エネルギーにおいては、dE/dx は全体として $1/\beta^2$ に依り、$v \simeq 0.96c$ までは、速度の増加と共に減少し、最小値に達する。この点の粒子は~~最小イオン~~化として知られている。また、dE/dx の最小値は同じ電荷の全ての粒子についてほとんど同一となっている。エネルギーがこの点を超えると $1/\beta^2$ がほぼ定数となり、dE/dx は (2.27) の対数部分により増加する。しかし、この相対論的増加は図 2.3 に見られる密度補正により相殺される。最小イオン化値よりも低いエネルギーではそれぞれの粒子は、ほとんどの場合、他の粒子の種類とは異なる dE/dx 曲線を示す。この特徴はしばしば素粒子物理学において、このエネルギーの範囲での粒子を識別する方法に用いられる。図 2.4 に示されていない非常に低いエネルギー領域では Bethe-Bloch の式は適さなくなる。実際、物質の軌道電子の速度に対して遅い速度では、dE/dx は最大に達し、そして再び急激に減少する。ここで、多くの複雑な効果が働いてくる。そのうち最も重要なものは粒子の電子の取り入れやすさである。これは粒子の有効電荷を下げ、阻止能 (dE/dx) を下げる。図 2.4 のように重い粒子が物体に入射した時よりもその軌道の終わり付近のほうがより多くのエネルギーを貯める。この効果を図 2.5 に示す。これはブラッグ曲線として知られ、軌道の終付近で最も多くエネルギーを貯めることを示している。しかし、最後には電子取り入れ始め、dE/dx は下がる。

2.2.4 dE/dx に対するスケーリング則

同一の物質媒体中の粒子に対する Bethe-Bloch の式は

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 f(\beta) \tag{2.34}$$

ここで $f(\beta)$ は粒子の速度のみの関数である。よってこの場合のエネルギー損失は粒子の電荷と速度のみに依存する。また、運動エネルギー $T = (\gamma - 1)Mc^2$ より、
$beta = g(T/M)$ となり、(2.34) は

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 f'(\frac{T}{M}) \tag{2.35}$$

これはスケーリング則を示している。すなわち、質量 M_1、電荷 z_1 の粒子に対する dE/dx が分かれば、質量 M_2、電荷 z_2、運動エネルギー T_2 の粒子に対するエネルギー損失は以下のようになる。

$$-\frac{dE_2}{dx}(T_2) = -\frac{z_2^2}{z_1^2}\frac{dE_1}{dx}\left(T_2\frac{M_1}{M_2}\right) \tag{2.36}$$

2.2.5 質量阻止能

物質の種類による依存性をより明確にすると、Bethe-Bloch の式は以下のようになる。

$$-\frac{dE}{d\epsilon}=-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}=z^2\frac{Z}{A}f(\beta,I) \tag{2.37}$$

ここで $d\epsilon=\rho dx$、ここで、Z がそれほど違わない場合には Z/A はほとんど変わらない。また、$I(Z)$ の依存性についても $I(Z)$ が対数のなかに現れることから同じことが言える。それゆえ、$dE/d\epsilon$ はほとんど物質によらない。

2.2.6 混合物や化合物に対する dE/dx

化合物や混合物については dE/dx は以下の式で良い近似ができる。

$$\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}=\frac{w_1}{\rho_1}\left(\frac{dE}{dx}\right)_1+\frac{w_1}{\rho_1}\left(\frac{dE}{dx}\right)_2+\cdots \tag{2.38}$$

ここで a_i, A_i をそれぞれ i 番目の構成要素の原子の数、原子量として

$$w_i=\frac{a_iA_i}{A_m} \tag{2.39}$$

ここで $A_m=\sum a_iA_i$

また、(2.27) で直接使う Z, A, I, δ, C の有効値を以下のように定義できる。

$$Z_{\mathrm{eff}}=\sum a_iZ_i \tag{2.40}$$

$$A_{\mathrm{eff}}=\sum a_iA_i \tag{2.41}$$

$$\mathrm{In}I_{\mathrm{eff}}=\sum\frac{a_iZ_i\mathrm{In}I_i}{Z_{\mathrm{eff}}} \tag{2.42}$$

$$\delta_{\mathrm{eff}}=\sum\frac{a_iZ_i\delta_i}{Z_{\mathrm{eff}}} \tag{2.43}$$

$$C_{\mathrm{eff}}=\sum a_iC_i \tag{2.44}$$

2.2.7 Bethe-Bloch の式の限界と他の効果

Bethe-Bloch の式は素粒子や原子核、α 粒子に対しては速度が相対論的な領域から $\beta\simeq 0.1$ までの領域では一般に数パーセントまでの誤差の正確な結果を与える。この正確さは原子核が $Z=26$ になるまでは [2.5-6] の前半で述べてある電荷依存性の補正を入れることによって増加すると思われる。$\beta\leq 0.05$ では Bethe-Bloch の式の中の仮定が補正については成り立たず、実際 $0.01<\beta<0.05$ の陽子ついては、まだ、満足のいく理論がない。より重い原子核については電子捕獲の影響があるので、このことがより当てはまる。このエネルギー範囲でのいくつかの経験則は [2.7] でみれる。しかしながら $\beta\simeq 0.01$ 以下においては [2.8] の Lindhard の定理によってエネルギー損失を説明できる。

2.2.8 チャネリング

Bethe-Bloch の式の適用の重要な例外としては空間的に対称な原子構造を持った物質、すなわち結晶中でチャネリングが起こる場合である。チャネリングとは、結晶の対称軸に対して臨界角より小さい角度で粒子が入射した時にのみ起こる効果である。実際、結晶面を通過するとき粒子は結晶の隙間へと粒子を導く小さな角度の散乱をする。図 2.6 はこれを模式的に表した図である。見て取れるように、この散乱で粒子は比較的長い距離の間結晶の隙間に居続けるゆっくりした振動の軌道を通る。この軌道の波長は一般的に多くの格子分の長さある。この正味の効果は、もちろん、Bethe-Bloch で想定するような不規則な物質を通過するよりも粒子と電子の衝突が少ないことである。よってチャネリングが起きている時にはエネルギー損失の割合は著しく減少する。よって結晶での実験においては、結晶の方向に気をつけなければならない。一般にチャネリングに対する臨界角は小さく ($\beta \simeq 0.1$ に対して約 1°) でエネルギーと共に減少する。これは公式 [2.5] によって見積もられ

$$\phi_c \simeq \frac{\sqrt{zZa_0Ad}}{1670\beta\sqrt{\gamma}} \tag{2.45}$$

となる。ここで a_0 は Bohr 半径で d は原子間距離である。$\phi > \phi_c$ に対して、チャネリングは起こらず、物質は不規則と扱われる。

飛程

2.2.9 ~~到達距離~~(range)

粒子が物質に入射してから止まるまでの間に粒子が貫通する距離を到達距離 (range) という。到達距離を実験的に測るには様々な厚さの当該物質についての入射粒子の透過率を測定することで得られる。この透過率と吸収体の厚さの典型的な曲線 (range number-distance) を図 2.7 に示す。ここから見て取れるように、薄い厚さでは、(実質的に) すべての粒子が透過しており、ある程度の厚さになると透過率は落ちる。ここで、透過率が急激にバックグラウンドのレベルまで落ちるのではなく、ある範囲にわたって落ち続けていることから、エネルギー損失は連続的に起こっているわけではなく、統計的な性質を持っていることがわかる。多数の同一粒子で測定を行うとある中間の値を中心とした到達距離の分布が得られるであろう。この現象は range straggling として知られている。この分布をガウス分布と考えると、この分布の平均値は平均到達距離として知られ、図 2.7 の下降線の中間に対応する。ここで大雑把に考えて半数の粒子が吸収される。全ての粒子が吸収される距離は、通常、この中間点での傾きを透過率が零になるまでとることで求める。この値は、extrapolated range や practical range として知られている。また、理論的な観点から平均到達距離はエネルギー T_0 の粒子に対して以下のようにも

考えたくなるかもしれない。

$$S(T_0) = \int_0^{T_0} \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1} dE \tag{2.46}$$

これは近似的な粒子の道のりを与える。しかし、これは図 2.14 のように物質中のジグザグな軌道の原因となる多重クーロン散乱の効果を無視している。よってこの到達距離はジグザグの道のりより短くなる。しかし、重い荷電粒子の場合は多重散乱の効果は一般的に小さく、(2.46) の直線到達距離は良い近似となる。実際には、準経験的な式として以下の式を使わなければならない。

$$R(T_0) = R_0(T_{\min}) + \int_{T_{\min}}^{T_0} \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1} dE \tag{2.47}$$

ここで、$T_{\min}$ は dE/dx の式が有効な最小のエネルギーで $R_0(T_{\min})$ は低エネルギーでのエネルギー損失を考慮に入れた経験的に得られる定数である。この方法で誤差が数パーセント以内の正確な結果が得られる。図 2.8 は Bethe-Bloch の式の数値積分による。様々な粒子の典型的な到達距離-エネルギー曲線である。これが両対数グラフ上でほぼ直線であることから以下の関係があることが期待される。

$$R \propto E^b \tag{2.48}$$

この関係は阻止能の式からも得られ、エネルギーが高すぎないときは

$$-dE/dx \propto \beta^{-2} \propto T^{-1} \tag{2.49}$$

$$R \propto T^2 \tag{2.50}$$

より正確な式は

$$R \propto T^{1.75} \tag{2.51}$$

この種のエネルギーと到達距離の関係は後で見るように、検出器の大きさや放射線遮蔽物の厚さを決めるのに必要である。dE/dx のスケーリング (2.36) から積分を実行することで、異なる粒子、同一の媒体について

$$R_2(T_2) = \frac{M_2}{M_1}\frac{z_1^2}{z_2^2} R_1\left(T_2 \frac{M_1}{M_2}\right) \tag{2.52}$$

となる。また、同一粒子の異なった媒質については Bragg-Kleeman 則と呼ばれる以下の大雑把な関係がある。

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} \tag{2.53}$$

ここで ρ, A はそれぞれ物質の密度と原子量である。化合物については以下の大雑把な近似が成り立つ。

$$R_{\text{comp}} = \frac{A_{\text{comp}}}{\sum \frac{a_i A_i}{R_i}} \tag{2.54}$$

ここで A_{comp} は化合物の分子量、$A_i R_i$ はそれぞれ i 番目の分子の構成要素、a_i は分子内での i 番目の構成要素の原子の数である。