

化合物に粒子を入射させるときには

$$R_{\text{comp}} = \frac{A_{\text{comp}}}{\sum \frac{a_i A_i}{R_i}} \quad (2.54)$$

A_{comp} は化合物の分子(?)の重さ。 A_i, R_i は化合物中の物質 i の重さと射程, a_i は分子の中の i の数。

Example 2.1

プラスチックシンチレーションカウンターの入射

2cmの厚さで 1.03 g/cm^3 の密度のプラスチックに
高速 (minimum ionizing = $\frac{dE}{dx}$ が極小) のミューオンが入射

ミューオンの速度は $v_{\text{minion}} \approx 0.96c \Rightarrow 300 \text{ MeV}$ のエネルギー

このとき $\frac{dE}{dx} \approx 1.9 \text{ MeV/g} \cdot \text{cm}^2$ (媒質が薄い $\frac{dE}{dx} = \text{const.}$ と仮定)

$$\Delta E = \int_0^x \frac{dE}{dx} dx \approx \frac{dE}{dx} x = 1.9 (\text{MeV/g} \cdot \text{cm}^2) \times 1.03 (\text{g/cm}^3) \times 2 (\text{cm}) = 3.9 (\text{MeV})$$

このとき 300 MeV より大きいエネルギーのミューオンもおおよそ同じくらいのエネルギーを失うということから検出器がミューオンの入射によって与える信号のスペクトルを予想することができる (宇宙線を用いて機器の校正ができる)

較

Example 2.2

600 MeV のプロトンのビームから 400 MeV のプロトンのビームを作る

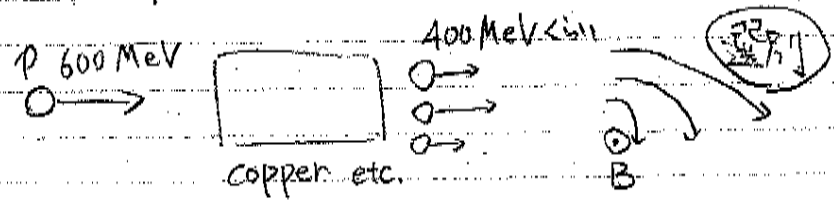
600 MeV のプロトンを銅などの媒質に入射させてエネルギーを 400 MeV にしたい。このとき必要な媒質の厚さは

$$\Delta x = - \int_{600}^{400} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE$$

数値的にこれを計算すればよい。教科書のような表を用いると簡単にこれを評価できる。

注意すべき点のは、この過程が統計的であるため出てきた粒子のエネルギーは 400 MeV 前後にばらつきがあるということ

→ 磁場でビームを曲げると Lorentz 力によって速さによって曲がり方が違うので 400 MeV の粒子のみを選別することができる



2.3 Cherenkov Radiation

チェレンコフ放射は媒質中を運動する粒子の速さがその媒質中の光の速さを上回ったときに起きる現象
 "光の衝撃波" が放射される。
 媒質中の光の速さは

$$v = \frac{c}{n} \quad (2.55)$$

(n は屈折率)

Fig 2.9 にあるように円錐状の波面が形成され粒子の飛跡から見て下のように定義される θ_c の方向に放射される

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n(\omega)} \quad (2.57)$$

こゝまでは簡単のため無限に大きな媒質に粒子が入射すると考えていた。

では電荷 ze の粒子が媒質中を一樣に直進していった場合、単位立体角あたりのエネルギーの流束はどうなるか?
 古典電磁気学より

$$\frac{d^2 E}{d\omega d\Omega} = z^2 \alpha \hbar n \beta^2 \omega^2 \theta \left| \frac{\omega L}{2\pi \beta c} \frac{n - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right|^2 \quad (2.58)$$

ただし

$$L(\theta) = \frac{\omega L}{2\pi \beta c} (1 - \beta n \cos \theta) \quad (2.59)$$

L が放射長の波長に比べて大きいときは $|n| \approx \frac{1}{\beta}$ のときは δ -関数に近づく

$$(2.58) = z^2 \alpha h n \beta^2 n^2 \theta \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^2 \left| \frac{n \left(\omega \times \frac{L}{2\beta c} (1 - \beta n \cos \theta) \right)}{\omega (1 - \beta n \cos \theta)} \right|^2$$

$$= z^2 \alpha h \left(n \times \frac{\omega}{\pi} \times \frac{L^2}{4c^2} \right) \underbrace{n^2 \theta \delta \left(\frac{L}{2\beta c} (1 - \beta n \cos \theta) \right)}$$

$d\Omega$ を積分すると \Rightarrow $\frac{1}{|\sin \theta|} \Rightarrow$ $T = \frac{L}{2\beta c}$ とした

$$\int d\Omega n^2 \theta \delta(1 - \beta n \cos \theta)$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta n^2 \theta \delta(-T n \beta (\cos \theta - \frac{1}{n\beta}))$$

$$= 2\pi \frac{1}{|T n \beta|} \int_{-1}^1 d \cos \theta n^2 \theta \delta(\cos \theta - \frac{1}{n\beta})$$

$$= \frac{2\pi}{T n \beta} n^2 \theta_c \quad (\text{但し } \cos \theta_c = \frac{1}{n\beta})$$

\rightarrow エネルギー損失は負号をつけて

$$-\frac{dE}{d\omega} = z^2 \alpha h \left(n \frac{\omega}{\pi} \frac{L^2}{4c^2} \right) \frac{2\pi}{\frac{L}{2\beta c} n \beta} n^2 \theta_c$$

$$= z^2 \frac{\alpha h}{c} \omega L n^2 \theta_c \quad (2.60)$$

これを媒質の厚さで微分し振動数 ω で積分すると

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 \frac{\alpha h}{c} \int \omega d\omega n^2 \theta_c = z^2 \frac{\alpha h}{c} \int \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)} \right) \quad (2.61)$$

この式からエネルギー損失は β の増加関数だが、
相対論的なエネルギー領域でさえ、この影響は衝突による
影響に比べて小さい。

4.1.17 放射によるエネルギー損失は Bethe-Block を含む。

4.1.17 カウンターを用いれば粒子の速度を正確に測ることが出来る。

4. レンゴフ放射を検出するときには光子の個数を数えることになるので (2.60) を $h\nu$ (光子1つのエネルギー) であって厚さで微分すれば

$$\frac{d^2N}{d\omega dx} = \frac{Z^2\alpha}{c} N^2\theta_c = \frac{Z\alpha}{c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) \quad (2.62)$$

$$c = f\lambda = \frac{\omega}{2\pi} \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \frac{d}{d\omega} = \frac{d}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{1}{2\pi c} \lambda^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2N}{d\lambda dx} = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{d^2N}{d\omega dx}$$

$$\frac{d^2N}{d\lambda dx} = + \frac{2\pi Z\alpha}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) \quad (2.63)$$

普通の4. レンゴフ放射の検出器は光電子増倍管
光子を電流のパルスに変換する
光電子増倍管は典型的には 350 nm ~ 550 nm の波長の光子を増えることのできる (2.63) だ

$$\frac{dN}{dx} = 2\pi Z^2\alpha N^2\theta_c \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = 475 Z^2 m^2 \theta_c \text{ photons/cm}$$

これは目に見えるような量ではない。

2.4 Energy Loss of Electrons and Positrons

重い荷電粒子と同様に電子や陽電子も物質中を通るとエネルギーを損失する。

これらの粒子はその軽さのため今まで考えていなかったようなエネルギー損失の要因を考慮する必要がある (原子核の電場による散乱、制動放射)

新たに加わるこれらの要因は入射エネルギーが数 MeV より小さい程度なら比較的、小さい効果しか及ぼさない。

(しかし入射エネルギーが数 10 MeV を上回るあたりから電磁波の放射によるエネルギー損失が衝突によるエネルギー損失と同等になる以上回るようになる)

これらの電子と陽電子の全エネルギー損失は

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{tot}} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{coll}} \quad (2.65)$$

および書か入る。

2.4.7 Collision Loss

衝突によるエネルギー損失は概ね Bethe-Bloch の式でよい
しかし 2つの理由のため補正が必要である。

- 電子と陽電子は質量が小さい。
(Bethe-Bloch の式の入射粒子が「曲がらない」という
仮定は適当ではない)

- 電子については入射粒子と散乱の対象になる粒子が同じ
(同種粒子は区別できないため異種粒子同士の
反応とは異なる)

これらを考慮して再び Bethe-Bloch の式を考えると
最大エネルギー移行 $W_{\text{max}} = \frac{I_e}{2}$ (I_e : 入射エネルギー) などから

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{\tau^2(\tau+2)}{2(I/m_e c^2)^2} + F(\tau) - \delta - 2\frac{C}{Z} \right] \quad (2.66)$$

τ は運動エネルギーを $m_e c^2$ で割ったもの
 $F(\tau)$ は電子と陽電子について違う形をとる式で

$$F(\tau) = 1 - \beta^2 + \frac{\tau^2 - (\tau+1)\ln 2}{(\tau+1)^2} \quad \text{for } e^-$$

$$F(\tau) = 2 \ln 2 - \frac{\beta^2}{12} \left(23 + \frac{14}{\tau+2} + \frac{10}{(\tau+2)^2} + \frac{4}{(\tau+2)^3} \right) \quad \text{for } e^+$$

2.4.2 制動放射によるエネルギー損失

数百 GeV 以下のエネルギーで、制動放射によるエネルギー損失を考慮しなければならないのは、電子と陽電子だけである。

放射断面積は m^{-2} に依るので、次に軽い粒子 μ -オン ($m_\mu = 106 \text{ MeV}$) は、
 $m_e/m_\mu \sim \frac{1}{200}$ であるので、その効果は $1/40000$ にすぎない。

制動放射は、入射電子が感じる電場の強さにも依るので、質量だけでなく衝突パラメータ q - q の原子番号 Z による断面積が決まる。また原子核の周りの電子による遮蔽効果も重要。

遮蔽効果のパラメータ

$$\xi = \frac{100 m_e c^2 h\nu}{E_0 E \mathcal{Z}^2} \left(\begin{array}{l} E_0: \text{散乱前の入射電子の全エネルギー} \\ E: \text{後} \\ h\nu: \text{放射された光子のエネルギー } (E_0 - E) \end{array} \right) \quad (2.67)$$

$\xi = 0$ で完全に遮蔽されている

制動放射の散乱断面積

$$d\sigma = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu} \left\{ (1+\xi^2) \left[\frac{\phi_1(\xi)}{4} - \frac{1}{3} \ln \xi - f(\xi) \right] - \frac{2}{3} E \left[\frac{\phi_2(\xi)}{4} - \frac{1}{3} \ln \xi - f(\xi) \right] \right\} \quad (2.68)$$

($\xi = E/E_0$, α : 構造定数 = $1/137$, $f(\xi)$: γ - μ 補正, $\phi_1(\xi), \phi_2(\xi)$: 遮蔽関数)

この式はホルン近似による計算であり、低エネルギーでは成り立たない。

$Z \geq 5$ の重原子核では遮蔽関数は μ - Z 原子核の原子模型から計算され、経験的に近似の式が与えられている。

$$\phi_1(\xi) = 20.863 - 2 \ln [1 + (2.55246\xi)^2] - 4 [1 - 0.6 \exp(-0.9\xi) - 0.4 \exp(-1.5\xi)]$$

$$\phi_2(\xi) = \phi_1(\xi) - \frac{2}{3} (11.65\xi + 6.5)^{-1} \quad (2.69)$$

$$\left(\begin{array}{l} \phi_1(0) = \phi_2(0) + \frac{2}{3} = 4 \ln 183 \quad (\xi \rightarrow 0) \\ \phi_1(\infty) = \phi_2(\infty) \rightarrow 19.17 - 4 \ln 3 \quad (\xi \rightarrow \infty) \end{array} \right)$$

$f(\xi)$ は、電子と電場の γ - μ 相互作用を考慮した、ホルン近似による補正で小さな値になる。

$$f(\xi) \approx a^2 \left[\frac{1}{1+a^2} + 0.20206 - 0.0369 a^2 + 0.0083 a^4 - 0.002 a^6 \right] \quad (2.70)$$

($a = \frac{Z}{137}$)

$\xi \gg 1$ と $\xi \approx 0$ の場合の散乱断面積を考へる。(2.68), (2.69) 式)

$$(\xi \gg 1) \quad d\sigma = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu} \left(1 + \xi^2 - \frac{2}{3}\xi\right) \left[\ln \frac{2E_0 E}{m_e c^2 h\nu} - \frac{1}{2} - f(\xi) \right] \quad (2.71)$$

0.50082

($\xi \approx 0$)

$$d\sigma = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu} \left\{ \left(1 + \xi^2 - \frac{2}{3}\xi\right) \left[\ln(183 Z^{-1/3}) - f(\xi) \right] + \frac{\xi}{9} \right\} \quad (2.72)$$

放射によるエネルギー損失は、光子のエネルギーに散乱断面積をかけた積分が与えられる。

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} = N \int_0^{\nu_0} h\nu \frac{d\sigma(E, \nu)}{d\nu} d\nu \quad (2.73)$$

(N : 原子の数密度 [cm^{-3}], $N = \frac{\rho N_A}{A}$ (質量密度 ρ , 質量数 A))

光子 $h\nu = E_0 - E$ より $\nu_0 = \frac{E_0}{h}$

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}} = N E_0 \Phi_{\text{rad}}$$

$$\Phi_{\text{rad}} = \frac{1}{E_0} \int_0^{\nu_0} h\nu \frac{d\sigma(E_0, \nu)}{d\nu} d\nu \quad (2.74)$$

\Rightarrow したがって Φ_{rad} は ν に依存せず、物質の性質だけに依存する関数となる。

$m_e c^2 \ll E_0 \ll 137 m_e c^2 Z^{-1/3}$ ならば $\xi \gg 1$ ならば (2.68), (2.69) 式)

$$\Phi_{\text{rad}} = 4Z^2 r_e^2 \alpha \left(\ln \frac{2E_0}{m_e c^2} - \frac{1}{3} - f(\xi) \right) \quad (2.75)$$

同様に $E_0 \gg 137 m_e c^2 Z^{-1/3}$ ならば $\xi \approx 0$ ならば

$$\Phi_{\text{rad}} = 4Z^2 r_e^2 \alpha \left[\ln(183 Z^{-1/3}) + \frac{1}{18} - f(\xi) \right] \quad (2.76)$$

図 2.10). (2.66) 式と (2.74) 式の比較

衝突電離による $\frac{dE}{dx}$ (2.66) $\left\{ \begin{array}{l} \text{入射エネルギーに比例} \rightarrow \text{対数的に} \\ Z \quad \quad \quad \rightarrow \text{線型的に} \end{array} \right.$

創成放射による $\frac{dE}{dx}$ (2.74) $\left\{ \begin{array}{l} \text{入射エネルギーに比例} \rightarrow \text{線型的に} \\ Z \quad \quad \quad \rightarrow \text{二次関数的に} \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{急速に増加する}$

衝突電離によるエネルギー損失 → 準連続的
 制動放射 → 1つないし2つの光子によって放出される
 ⇒ 単色の電子ビームに大抵含まれは見られる。

2.4.3 電子-電子 制動放射

原子内電子の作る電場によって起る制動放射
 衝突断面積は (2.68) 式を用いて $Z \rightarrow Z$ と置き換えたもの (近似的に)
 ↓
 合計の断面積は $Z \rightarrow Z+Z = Z(Z+1)$ と置き換えたものになる。

2.4.4 臨界エネルギー

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll} \quad (2.77)$$

となるときのエネルギーを臨界エネルギー E_c と呼び、それ以上の吸収体には存在しない。

(表 2.2) 代表的な物質の臨界エネルギー

$E > E_c$... エネルギー損失は 制動放射によるものが支配的
 $E < E_c$... 衝突電離

2.4.5 放射長

放射長 ... 電子のエネルギーが放射によって始めの $1/e$ まで減少するのに要する距離
 (2.74) 式より

$$-\frac{dE}{E} = N \sigma_{rad} dx \quad (2.79)$$

衝突によるエネルギー損失が無視できるような高エネルギーを考えると、(2.76) 式より σ_{rad} は E に依存しないので、(2.79) 式を積分できて

$$E = E_0 \exp\left(\frac{-x}{L_{rad}}\right) \quad (2.80)$$

放射長 $L_{rad} = \frac{1}{N \sigma_{rad}}$

$$\frac{1}{L_{rad}} = N_{rad} \approx \left[4Z(Z+1) \frac{PN_a}{A} \right] r_0^2 \alpha \left[\ln(183Z^{-1/3}) - f(Z) \right] \quad (2.81)$$

(表 2.3) 代表的な物質の L_{rad} の値

計算に便利な近似として次の式が与えられている。

$$L_{rad} = \frac{716.48 / \text{cm}^2 \text{A}}{Z(Z+1) \ln(287/\sqrt{Z})} \quad (2.82)$$

α を L_{rad} を単位として表す (2.74) 式は

$$-\frac{dE}{dt} \approx E_0 \quad (\tau: L_{rad} \text{ を単位とした長さ}) \quad (2.83)$$

すなわち、 L_{rad} 当たりのエネルギーの変化を表す

このように表す。放射によるエネルギーの損失は、物質に依る。

化合物や混合物の放射長は、(2.3)と同様に(2.74)式を適用し、質量厚(当たり)で表す。

$$\frac{1}{L_{rad}} = w_1 \left(\frac{1}{L_{rad,1}} \right) + w_2 \left(\frac{1}{L_{rad,2}} \right) + \dots \quad (2.84)$$

(w_1, w_2, \dots : (2.39) 式で定義されている)