

2.4.6 Range of Electron

電子は原子核によって散乱をうけやすいので、電子のレンジは $\frac{dE}{dx}$ の公- $\%$ 式を積分した値と大きく異なる。(物質やエネルギーにより 20~400 さら
に重い元素になると、より大きなエネルギー移行が可能のため、電子に
よるエネルギーロスが大きくなる。← $\frac{dE}{dx}$ が
いずれにせよ、極少の回数の衝突でビーム電子がほぼエネルギーを失う
ことがありうるため、レンジに大きなずれが生まれる。(図 2.11)
重い粒子は経験則としてレンジとエネルギーの関係が多く定式化されて
いる。(図 2.12)

2.4.7 the absorption of β electrons

β 崩壊により電子は連続的なエネルギースペクトルを持つため、 β 線の
吸収は指数関数の形でよく近似できる。(図 2.13)

$$I = I_0 \exp(-\mu x)$$

μ は β 線吸収係数と呼ばれ、 β 線の endpoint energy と直接関係する。
そのため endpoint energy を図ったり膜の厚さを測るのにつかわれる。た
だし指数関数で近似できるのは単純な許容遷移の場合のみで 複雑な禁
止遷移のときはずれてしまう。

2.5 multiple coulomb scattering

荷電粒子が物質を通過すると、殻電子との非弾性散乱に加え確率は下
がるものの繰り返し弾性クーロン散乱を起こす。スピン効果を無視した
一つ一つの散乱過程はラザフォード散乱の式で与えられる

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = z_2^2 z_1^2 r_0^2 \frac{(m_e c / \beta p)^2}{4 \sin^4 \theta / 2}$$

散乱は $1/\sin^4 \theta / 2$ に依存するため、大多数のビーム粒子は極小さな角
度に散乱される。(エネルギー移行は無視する) したがってビーム粒子は
物質中でジグザグなランダムウォークをする。しかし小さな角度の積み
重ねで最初の方向と大きくずれる。

物質中のクーロン散乱は 3つの領域に分かれる：

1. single 散乱： ターゲットが十分に薄く、クーロン散乱の確率が無視できる場合 → (2.86)
2. prural 散乱： 平均散乱回数が 20 回以下。難しい。
3. multiple 散乱： 平均散乱回数が 20 回以上。統計的に扱え、しかも最もよくあるケースである。以下はこのケースを扱う。

一般に multiple 散乱の厳密な計算は複雑で洗練度に応じていくつかのレベルの方法と式が存在する。その中でも最もよくつかわれるのが moliere と、snyder と scott による小角度近似である。それらの方法は本質的に等価で 30 度までには一般的に有効。ただし遷移電子と重元素中の電子では有効ではない。
重い原子

moliere は角度分布を以下のようにあらわした

$$P(\theta)d\Omega = \eta d\eta (2\exp(-\eta^2) + \frac{F_1(\eta)}{B} + \frac{F_2(\eta)}{B^2} + \dots) \quad (2.87)$$

$$\eta = \theta / (\theta_1 \sqrt{B}), \theta_1 = 0.3965(zQ/p\beta) \sqrt{(\rho\delta x/A)}$$

B は $g(B) = \ln B - B + \ln \gamma - 0.154 = 0$ を満たし、

$$\gamma = 8.831 \times 10^3 \frac{qz^2 \rho \delta x}{\beta^2 A \Delta}, \Delta = 1.13 + 3.76 \cdot \left(\frac{Zz}{137\beta}\right)^2$$

$$F_k(\eta) = \frac{1}{k!} \int J_0 \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \left[\frac{y^2}{4} \ln\left(\frac{y^2}{4}\right)\right]^k dy$$

Z:陽子数、A:質量数、 δx :ターゲットの厚さ (cm)、 ρ :ターゲットの密度 (g/cm^3)、p:ビーム粒子の運動量 (Mev/c)、z:粒子の電荷

$$Q = \begin{cases} \sqrt{Z(Z+1)} & \text{電子陽電子} \\ Z & \text{他の粒子} \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} Z(Z+1)^{1/3} & \text{電子陽電子} \\ Z^{4/3} & \text{ほかの粒子} \end{cases}$$

通常 式 (2.87) の三項で十分である。

図 2.15 15MeV 電子が薄い金を通過するときの散乱分布。小さな角度ではガウシアンに近似できるが大きい角度では長い尾を引く。大きい角度では一回だけの大角度クーロン散乱が効いてくるため、ラザフォード散乱 $1/\sin^4(\theta/2)$ に従うべき。小角度と大角度領域の遷移を繋ぐのが prural 散乱。それは moliere によって小角度散乱の集まりとして計算される。

2.5.1 multiple scattering in gaussian approximation

大角度の散乱が起きる確率は低いのでこれを無視すれば小さな角への一粒子による散乱の考え方を多粒子に適用できるすなわちガウス分布で近似できる

$$P(\theta) \approx \frac{2\theta}{\langle \theta^2 \rangle} \exp\left(\frac{-\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle}\right) \quad (2.88)$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \int_0^\infty \theta^2 P(\theta) d\Omega, \sqrt{\langle \theta^2 \rangle} : rms \text{ 散乱角}$$

(2.87)と比較して $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \approx \theta_1 \sqrt{B}$ であるが長い尾のためすべての項を考えるとこの項は無限大になる。

実際の測定に基づいた式 lynch と dahl によって得られた

$$\langle \theta^2 \rangle = 2 \frac{\chi_c^2}{1+F^2} \left[\frac{1+\nu}{\nu} \ln(1+\nu) - 1 \right] \text{rad}^2$$

$$\nu = 0.5 \frac{\Omega}{1-F}, \Omega = \frac{\chi_c^2}{\chi_a^2}$$

$$\chi_c^2 = 0.157z \left(\frac{Z(Z+1)}{A} \right) \frac{x}{p^2 \beta^2}$$

$$\chi_a^2 = 2.007 \times 10^{-5} Z^{2/3} [1 + 3.34 Z z \alpha / \beta]^2 / p^2$$

p : 運動量 (MeV/c) 、 x : pathlength (g/cm²) 、 z : 入射粒子の電荷
 Z, A : 散乱体の原子番号と質量数 、 α : 微細構造定数 $\approx 1/137$
 F : moliere 分布を考慮した値

F が 90~99.5 パーセント、 $10 < \Omega < 10^8$ ならば この式は誤差 2 パーセント以内で実験値と一致する。

テキスト図 2.15 において実際の $\langle \theta^2 \rangle$ を求めると

$$\langle \theta^2 \rangle = \begin{cases} 0.0023 \text{rad}^2, & x = 18.66 \text{mg/cm}^2 \\ 0.0051 \text{rad}^2, & x = 37.28 \text{mg/cm}^2 \end{cases}$$

標準偏差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\langle \theta^2 \rangle}{2}} = \begin{cases} 1.94, \\ 2.89, \end{cases}$$

図 2.14 のように粒子の入射方向の直線を含む平面を考え、散乱角 θ をそのまま平面上に投射した角を θ_x とする。先ほどのガウス分布を θ_x に書き直すと

$$P(\theta_x) = (2\pi \langle \theta_x^2 \rangle)^{-1/2} \exp\left(\frac{-\theta_x^2}{2 \langle \theta_x^2 \rangle}\right) d\theta_x$$

ここで $\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle / 2$

粒子の側方変位 r は非常に小さいが r を用いて P を表すと

$$P(r) dr = 6r (\langle \theta^2 \rangle t^2)^{-1} \exp\left(\frac{-3r^2}{\langle \theta^2 \rangle t^2}\right) dr$$

r : 変位、 $\langle r^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle t^2 / 3$

$t = x / L_{rad}$: thickness in radiation length

ただし L_{rad} は式を見やすくするために用いただけで散乱とは特に関係ない。

2.5.2 backscattering Of lowenergy electron

電子は質量が小さいため散乱角が大きくなりやすい。そのため多粒子によって散乱されると粒子が入射した側と同じ側から出てしまうことがある(後方散乱)。この傾向は電子のエネルギーが低いほど大きく、散乱起こす物質の原子番号が増えるにつれて大きくなる。入射粒子の数に対する後方散乱粒子の数の比を後方散乱係数またアルベド(反射能)と呼ぶ。電子が物質に対し斜めに入射したときほど後方散乱の割合が大きくなりまた後方散乱係数は入射粒子のエネルギーに依存する。図 2.17 参照

2.5.2 低エネルギー電子の後方散乱

電子は質量が小さいので、原子核からの散乱により特に大角度で偏向する。この確率はとても高いため、多重散乱電子は正反対に向きを変え、散乱体の外へと後方散乱する。(参照：図 2.16 大角度の多重散乱による電子の後方散乱) この効果はエネルギーの低い電子ほど強く働き、散乱体の原子番号 Z とともに増加していく。後方散乱もまた入射角に依存し、散乱体に斜めに入射した電子は、垂直に入射したものに比べ明らかに大きな確率で散乱する。

後方散乱電子の数と入射電子の比は、後方散乱係数やアルベド(反射能)として知られている。図 2.17 は、横軸が電子のエネルギー、縦軸が各物質で測定した電子の後方散乱係数 η である。電子は物質に垂直に入射させた。 Z の値はそれぞれ、C が 6, Al が 13, Cu が 29, Ag が 47, Au が 79 であり、 Z と η に相関があることが分かる。形状やエネルギーに依存する電子検出器にとって、後方散乱はとても重要な要素である。検出可能な信号を作る前に、大部分の電子は散乱して出ていってしまうだろう。例えば、NaI のような Z の大きな物質では、非平行な電子の 80% は反射してしまう。

2.6 エネルギーストラグリング：エネルギー損失分布

これまでのエネルギー損失の議論では、物質の単位厚さを通じた時の、荷電粒子による平均エネルギー損失を主として考えてきた。しかし、一般的に、エネルギー損失の総量は平均エネルギー損失と等しくはならない。何故なら、衝突の回数と、各衝突でのエネルギー移行によって、統計的な変動が生じるからだ。それ故に、単色ビームを厚さ一定の物質に通過させた後のエネルギー分布は、 dE/dx で与えられる平均エネルギー損失によってエネルギーが定数だけ減ったデルタ関数的なピークではなく、広がりを持つエネルギー分布を見ることができる。これらのゆらぎは既に、飛程のストラグリング(飛程のゆらぎ)というものとして知っている。実際は、一定の厚さの散乱体によるエネルギー損失のゆらぎを観測する代わりに、一定のエネルギー損失の経路長の揺らぎを観察する。

理論的観点から、与えられた厚さの散乱体によるエネルギー損失分布の計算は難しく、一般的に散乱体が厚い場合と薄い場合に分けて考えられる。

2.6.1 厚い散乱体：ガウシアン極限

衝突回数の多い比較的厚い散乱体では、中心極限定理により、エネルギー損失分布はガウシアン形式で簡単に記述できる。中心極限定理とは、全て同じ統計的分布に従う確率変数の 1 から N までの総和は、 N の極限でガウス分布に近づく、というものであった。もし、1 回の原子衝突によるエネルギー損失 δE を確率変数としてとり、そして、各衝突によるエネルギー損失が粒子の速度の変化を無視できるほどだと仮定すれば(そのため速度に依存する衝突のクロスセクションが一定となる)、全エネルギー損失はたくさんの独立で共通の分布を持つ δE の和となる。十分な数の衝突 N があると仮定すれば、その合計はガウシアン形式に近づくので、

$$f(x, \Delta) \propto \exp\left(\frac{-(\Delta - \bar{\Delta})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.93)$$

x : 散乱体の厚さ Δ : エネルギー損失 $\bar{\Delta}$: 平均エネルギー損失 σ : 標準偏差

で表される。

非相対論的な重い粒子に対しては、このガウシアン幅 σ_0 はボーアにより以下のように計算されている。

$$\sigma_0^2 = 4\pi N_a r_e^2 (m_e c^2)^2 \rho \frac{Z}{A} x = 0.1569 \rho \frac{Z}{A} x [\text{MeV}^2] \quad (2.94)$$

N_a はアボガドロ数, r_e, m_e は古典的な電子半径及び質量, ρ, Z, A はそれぞれの物質の密度, 原子番号, 原子量である. この式は相対論的粒子へと簡単に拡張することが出来, それは次のようになる.

$$\sigma^2 = \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2)}{1 - \beta^2} \sigma_0^2 \quad (2.95)$$

2.6.2 非常に厚い散乱体

上述の分析の重要な仮定は, エネルギー損失が初期エネルギーに比べて小さく, 粒子の速度の変化を無視できる, ということであった. とても厚い散乱体ではかなりの量のエネルギーが失われ, この仮定は当然棄却される. このような場合の分布は Tscharlar[2.26,27] の論文および Bichsel[2.28] のレジュメを参照のこと.

2.6.3 薄い散乱体: Landau と Vavilov の理論

厚い散乱体の場合と比べ, 薄い散乱体や気体での分布は N が小さく中心極限定理が使えないため, 計算は非常に複雑になる. これは, 1 回の衝突で, 大きなエネルギー移行が起きる可能性が高くなるためである. 重い粒子では, 最大エネルギー移行 W_{\max} が (2.28) の関係式により制限されるが, 一方電子では初期エネルギーの半分ほどが移行する. 電子の場合では, 制動放射によって一度にたくさんのエネルギーを失うこともある. 図 2.18 で一般的な薄い散乱体に示したように, このような事象は珍しいにも関わらず, エネルギー損失の確率分布は高エネルギー側で広いすそを持ち, 非対称形に歪んでいる. そのため, 図のピークは平均エネルギー損失ではなく, 最頻エネルギー損失として定義されることに注意する. この 2 つの量は分布のパラメータとして用いられる.

この分布の基礎理論的な計算については, Landau, Symon, Vavilov によって行われた. ただし, それぞれの理論で適用範囲が若干異なる. 適用範囲の区別をするパラメータとして, 平均エネルギー損失と一回の衝突で起きうる最大エネルギー移行との比として,

$$\kappa = \bar{\Delta} / W_{\max} \quad (2.96)$$

を導入する. 平均エネルギー損失 $\bar{\Delta}$ は Bethe-Bloch の式で計算されるが, ほとんどの用途では近似により, 通常, 第一項のみを考え \log 部分を無視する. 即ち,

$$\bar{\Delta} \simeq \zeta = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 x \quad (2.97)$$

という近似である. 以下ではこの量を ξ で表す. 「薄い散乱体」の範囲は一般的に $\kappa < 10$ で与えられるが, 図 2.19 から分かるように, $\kappa > 1$ の範囲で分布は既にガウシアンに近づいている. もちろん, $\kappa > 10$ ではガウシアンとの違いはごく僅かである.

Landau の理論

Landau は $\kappa \leq 0.01$ の非常に薄い散乱体の場合のエネルギー損失分布を求めた. 以下の仮定を行う.

1. $W_{\max} \rightarrow \infty$, 即ち, $\kappa \rightarrow 0$
2. 各エネルギー移行は, 電子が自由粒子とみなせるほどに十分大きく, いわゆる遠隔衝突 (distant collision) による小さなエネルギー移行は無視出来る.

3. 粒子の速度の減少は無視できる，即ち，粒子の速度は一定である．

これにより，この分布は次のように表される．

$$f(x, \Delta) = \phi(\lambda)/\zeta \quad (2.98)$$

ここに，

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-u \ln u - u\lambda) \sin \pi u du$$

$$\lambda = \frac{1}{\zeta} [\Delta - \zeta(\ln \zeta - \ln \epsilon + 1 - C)]$$

$$C = \text{オイラーの定数} = 0.577\dots$$

$$\ln \epsilon = \ln \frac{(1 - \beta^2)I^2}{2mc^2\beta^2} + \beta^2$$

ϵ は本質的には仮定 2 の下で許される最小エネルギー移行を表している． $\phi(\lambda)$ は λ にのみ依存する万能評価関数で，数値的に評価する必要がある．各 λ の値との対応表は，例えば Seltzer, Berger[2.30] や，Borsh-Supan[2.31] といった人達によって作られた．また，Schorr[2.32] はコンピュータを使った Landau 分布の計算を発展させた．

$\phi(\lambda)$ を評価すると，最頻エネルギー損失が

$$\Delta_{\text{mp}} = \zeta[\ln(\zeta/\epsilon) + 0.198 - \delta] \quad (2.99)$$

であるとわかる．ただし，補正のため密度の効果として δ を加えた．

Symon の理論と Vavilov の理論：中間的な κ の場合

Landau が扱った κ の小さい領域とガウシアン極限の領域との間は，Symon と Vavilov によって研究された．Symon は，Landau による限定的な分布を使うことで，エネルギー損失分布を得るための独創的な近似を多く創りだした．しかし残念ながら，彼の計算結果は現在のコンピュータでグラフ表現するには不都合が多い．実際の手順とその結果は Rossi[2.33] の本に載っている．

対照的に Vavilov の理論は Landau による定式化に沿って，可能な最大エネルギー移行を補正することでこの計算を一般化した．ただし，Landau による仮定の後者 2 つはそのまま用いる．この計算結果は更に少し複雑だが，Landau 分布とガウシアン極限に分解できる．これらの具体的な式は [2.30]，[2.34] を，コンピュータプログラムについては [2.32] を参照．

Vavilov の計算結果により，図 2.19 の Vavilov 分布が得られる．図 2.19 は様々な κ における Vavilov 分布及び，L と表記した Landau 分布 ($\kappa = 0$) のグラフである． $\kappa = 1$ で既にガウシアンに近い形であることにも注意する．ガウシアン極限で Vavilov は分散

$$\sigma^2 = \frac{\zeta^2}{\kappa} \frac{1 - \beta^2}{2} \quad (2.100)$$

を与え，これは重い粒子に関するボーアの式 (2.95) に一致する．

図 2.20 は Vavilov と Symon の理論値を実験結果と比較したものである．

Landau と Vavilov の分布の補正

Landau と Vavilov による計算は、様々な人によって補正が行われた。特に Blunck と Leisegang[2.35] は、仮定 2 により無視していた原子内電子の束縛効果を考慮して Landau の理論を補正した。当然結果は複雑だが、計算に適した形は Matthews らによる [2.36] で得られ、Vavilov 分布についての同様の補正は Shulet らによる [2.37] で与えられた。

2.7 光子の相互作用

物質中の光子 (X線, γ 線) のふるまいは荷電粒子とは全く異なる。特に光子は電荷を持っていないので、荷電粒子の特徴である非弾性散乱が起きない。

X線, γ 線の主な相互作用は

1) 光電効果

2) コンプトン散乱

3) 対生成

核の解離反応も起こるが、この議論では無視できる。

・ 以下の反応は X線と γ 線の 2つの重要な性質上の特徴を説明する。

(1) X線と γ 線は荷電粒子より何倍も透過力がある。

(2) 光子のビームは強度が弱められる下けで、物質を透過してエネルギーが減らない。

・ 1つ目の特徴は (1)~(3) の電子の非弾性散乱の断面積に比べて断面積がより小さいため。

・ 2つ目の特徴は (1)~(3) で入射ビームの光子が吸収散乱されることにより、取り除かれるため。

したがって、あくまで通過する光子は相互作用しない。よってそのままのエネルギーを持っている。しかし光子の総数は相互作用した光子を引いた数になる。光子の強度が弱まることは見られて、

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x) \quad (2.101)$$

I_0 : ビームの強度, x : 吸収体の厚さ

μ : 吸収係数... 吸収物質に特徴的で全相互作用断面積に直接関係する。 γ 線検出器の議論のときによく出てくる。

2.7.1 光電効果

光電効果とは、原子内電子による光子の吸収と、原子からの電子放出の関係のこと。飛び出す電子のエネルギーは

$$E = h\nu - B.E. \quad (2.102)$$

で表され、B.E. は電子の束縛エネルギー。

自由電子は光子を吸収せず、運動量が保存するので、光電効果は反跳運動量を原子核が吸収することで束縛電子に起きる。原子の最も高い束縛エネルギーを超えたエネルギー(K殻)では、断面積が比較的小さいがK殻のエネルギーに到達するとき急激に増加する。この点を超えると断面積は極端に落ちる。なぜならK電子がもはや光電効果に使えないから、この落ち方はK absorption edge として知られている。このエネルギー以下ではまた一旦上昇し、L, M準位などで落ちる。これはそれぞれL absorption edge, M absorption edge として知られている。

原子内電子のディラックの波動関数が複雑なため、理論的に光電効果を厳密に計算することは難しい。(しかしK殻のB.E.より光子のエネルギーが大きいつまるところのほこではK殻電子の寄与である。もしエネルギーが非相対論的、つまり $h\nu \ll m_e c^2$ なら断面積はボルン近似で計算できる。

$$\Phi_{photo} = 4\alpha^2 \sqrt{2} Z^5 \phi_0 \left(\frac{m_e c^2}{h\nu}\right)^2 \quad \text{cm}^2/\text{atom} \quad (2.103)$$

$$\phi_0 = \frac{8\pi r_0^2}{3} = 6.651 \times 10^{-25} \text{cm}^2, \alpha = \frac{1}{137}$$

エネルギーがK-edge付近では、上の式が

$$\Phi_{photo} = \phi_0 \frac{Z^2 \pi (137)^3}{Z^2} \left[\frac{\nu_k}{\nu}\right]^4 \frac{\exp(-4\xi \cot^{-1} \xi)}{1 - \exp(-2\pi \xi)} \quad \text{cm}^2/\text{atom} \quad (2.104)$$

$$h\nu_k = \frac{(Z-0.03)^2 m_e c^2 \alpha^2}{2}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\nu_k}{\nu - \nu_k}}$$

$\nu \approx \nu_k$ のとき $\xi^{-1} \gg 1^2$ (cf. (2.104)) は

$$\Phi_{\text{photo}} = \frac{6.3 \times 10^{-18}}{Z^2} \left(\frac{V_h}{V} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.105)$$

L, M殻の式もあるが、上式よりも複雑になっている。これについては Davisson [2.38] 参照。

式(1)の原子番号 Z に断面積が依存していることが分かる。断面積は光子のエネルギーに多少依存して変化するが、MeVのエネルギーでは、 Z の4乗から5乗に依存する。これより、 Z が大きい物質ほど光電子の吸収が起る。後の章で見えるが、このことは線検出器を選ぶときに重要なことである。

2.7.2 コンプトン散乱

コンプトン散乱は光子の相互作用を理解するための最良のもの1つである。コンプトン散乱は自由電子と光子の散乱である。もちろん電子は束縛されているが、もし光子のエネルギーが束縛エネルギーより高いなら、束縛エネルギーは無視できて、電子は自由と見なせる。

図 2.22 にこの過程が描かれていて、これを元に運動量保存とエネルギー保存より

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (1) \Rightarrow m_e v^2 = 2hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \quad (1')$$

$$x: \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos\theta + m_e v \cos\phi \quad (2) \Rightarrow m_e v^2 \cos^2\phi = \frac{h^2}{\lambda^2} - 2 \frac{h^2}{\lambda\lambda'} \cos\theta \quad (2')$$

$$y: 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin\theta - m_e v \sin\phi \quad (3) \Rightarrow m_e v^2 \sin^2\phi = \frac{h^2}{\lambda'^2} \sin^2\theta \quad (3')$$

(1'), (2'), (3') より

$$2hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'} \cos\theta + \frac{1}{\lambda'^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{2m_e c} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - 2 \cos\theta + \frac{\lambda}{\lambda'} \right)$$

ここで $\lambda' \approx \lambda$ と近似して $\frac{\lambda'}{\lambda} \approx 1$, $\frac{\lambda}{\lambda'} \approx 1$ とすると

$$\therefore \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \quad (4)$$

この(4)式を使い、また $\sigma = \frac{3}{4} \frac{h\nu}{m_e c^2}$ とすると

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)}$$

$$T = h\nu - h\nu' = h\nu \frac{\gamma(1 - \cos\theta)}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{2}{(1 + \gamma)^2 \tan^2\phi + 1}$$

$$\cot\phi = (1 + \gamma) \tan\frac{\theta}{2}$$

(2.106)

を求めることができる。

コンプトン散乱の断面積は量子電磁気学(QED)を使って初めて計算されたものの一つである。これはクライン-仁科の公式として知られていて、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{[1 + \gamma(1 - \cos\theta)]^2} \left(1 + \cos^2\theta + \frac{\gamma^2(1 - \cos\theta)^2}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)} \right) \quad (2.107)$$

r_e : 古典的電子半径

この式を $d\Omega$ について積分するとコンプトン散乱における1電子当たりの全断面積が得られる。

$$\sigma_c = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1 + \gamma}{\gamma^2} \left[\frac{2(1 + \gamma)}{1 + 2\gamma} - \frac{1}{\gamma} \ln(1 + 2\gamma) \right] + \frac{1}{2\gamma} \ln(1 + 2\gamma) - \frac{1 + 3\gamma}{(1 + 2\gamma)^2} \right\} \quad (2.108)$$

クライン-仁科の公式から計算される2つの有用な物理量があり、

σ^s : Compton scattered cross section ... 散乱した光子が持っているエネルギー

σ^a : Compton absorption cross section ... 反跳電子に移ったエネルギー

$$\sigma_c = \sigma^s + \sigma^a \quad (2.109)$$

$$\frac{d\sigma^s}{d\Omega} = \frac{h\nu'}{h\nu} \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.110)$$

これを積分して

$$\sigma^s = \pi r_e^2 \left[\frac{1}{3} \ln(1+2\gamma) + \frac{2(1+\gamma)(2\gamma^2-2\gamma-1)}{\gamma^2(1+2\gamma)^2} + \frac{8\gamma^2}{3(1+2\gamma)^3} \right] \quad (2.111)$$

また

$$\sigma^a = \sigma_c - \sigma^s \quad (2.112)$$

検出器の議論の際に(2)もよく使う他の公式は、コンプトン反跳電子のエネルギー分布で

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\pi r_e^2}{m_e c^2 \gamma^2} \left[2 + \frac{S^2}{\gamma^2(1-S)^2} + \frac{S}{1-S} \left(S - \frac{2}{\gamma} \right) \right] \quad (2.113)$$

$$S = \frac{T}{h\nu}$$

運動学上許される最大反跳エネルギーは

$$T_{\max} = h\nu \left(\frac{2\gamma}{1+2\gamma} \right) \quad (2.114)$$

この T_{\max} が 図 2.24 にも見られる Compton edge と知られている。

トムソン散乱とレイリー散乱

コンプトン散乱に関連して古典的なトムソン散乱とレイリー散乱がある。

・トムソン散乱 … 古典的極限における自由電子で光子の散乱
($h\nu \ll m_e c^2$)

このとき、クライン-イノエの公式がトムソンに断面積を与える式になり、

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (2.115)$$

・レイリー散乱 … 原子全体で光子の散乱。原子内の全ての電子が干渉するので コヒーレント散乱とも呼ばれる。

この2つの散乱では、エネルギーの移行がないことが特徴である。原子は励起もイオン化もされず、光子の向きが変わるだけになる。X線やγ線などの高エネルギー域では、トムソン散乱とレイリー散乱は無視できる。

2.7.3 対生成

対生成とは光子が電子-陽電子対に変換するに等しい。対生成が起こるには、光子のエネルギーが少なくとも 1.022 MeV 以上なければならない。

対生成は理論的には制動放射と簡単な置換によって関連づけられる。制動放射に関して、原子核のまわりを原子内電子で遮へいするに重要な役割を担っている。断面積は ξ に依存し、

$$\xi = \frac{100 \pi r_e^2 \alpha^2 h\nu}{E_+ E_- Z^3} \quad (2.116)$$

E_+ : 飛び出す陽電子の全エネルギー, E_- : 飛び出す電子の全エネルギー
極度の相対論的エネルギーと任意の遮へいでは、ボルン近似で式が与えられる。

$$d\tau = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{dE_+}{(h\nu)^3} \left\{ (E_+^2 + E_-^2) \left[\frac{\phi_1(\xi)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - f(Z) \right] + \frac{2}{3} E_+ E_- \left[\frac{\phi_2(\xi)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - f(Z) \right] \right\} \quad (2.117)$$

ϕ_1, ϕ_2 (2.69) で使われた遮へい関数
他の変数: (2.68) で定義されたもの

(2.117) 式は全く遮へいされていないときと完全に遮へいされているときを簡単に記述する。

・全く遮へいされていないとき: $\xi \gg 1$

$$d\tau = 4Z^2 \alpha r_e^2 dE_+ \frac{1}{(h\nu)^3} (E_+^2 + E_-^2 + \frac{2E_+ E_-}{3}) \left[\ln \frac{2E_+ E_-}{h\nu m_0 c^2} - \frac{1}{2} - f(Z) \right] \quad (2.118)$$

・完全に遮へいされているとき: $\xi \rightarrow 0$

$$dT = 4Z^2 \alpha r_e^2 \frac{dE_+}{(h\nu)^3} \left\{ (E_+^2 + E_-^2 + \frac{2E_+E_-}{3}) [\ln(183 Z^{\frac{1}{2}}) - f(Z)] - \frac{E_+E_-}{9} \right\} \quad (2.119)$$

ボルン近似を用いるが、この式はZが大きいとき、またはエネルギーが低いときは正確ではない。低いエネルギーで遮へいなしのときの複雑な式はゲーテ・ハイトラによって導かれていて、ゲーテ・アシュキン[2.10]の中で、ハフによる多少簡単な公式に沿って与られている。

対生成の全断面積を得るためには、数値積分をしなければならない。

・遮へいなし: $m_e c^2 \ll h\nu \ll 137 m_e c^2 Z^{\frac{1}{2}}$ のとき

$$\tau_{\text{pair}} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left[\frac{7}{9} \left(\ln \frac{2h\nu}{m_e c^2} - f(Z) \right) - \frac{109}{54} \right] \quad (2.120)$$

・完全遮へい: $h\nu \gg 137 m_e c^2 Z^{\frac{1}{2}}$ のとき

$$\tau_{\text{pair}} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left\{ \frac{7}{9} [\ln(183 Z^{\frac{1}{2}}) - f(Z)] - \frac{1}{54} \right\} \quad (2.121)$$

・他の場合は(2.117)をそのまま数値積分

制動放射に関して、対生成は原子内電子の電場においても起こり得る。同様の結果が断面積について得られるのはちとてあるが、Zだけ小さくなっている。よってこの相互作用を近似するために、 Z^2 を $Z(Z+1)$ に置換する。

全断面積から対生成の線線の平均自由行程 λ_{pair} を計算すると(2.121)より

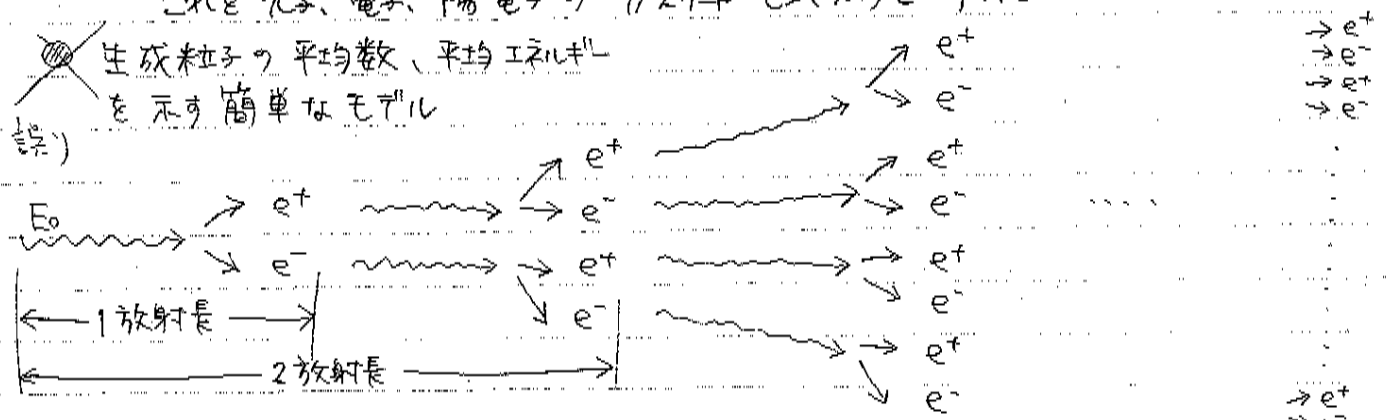
$$\frac{1}{\lambda_{\text{pair}}} = N \tau_{\text{pair}} \approx \frac{7}{9} 4Z(Z+1) N r_e^2 \alpha [\ln(183 Z^{\frac{1}{2}}) - f(Z)] \quad \text{N: 原子密度} \quad (2.122)$$

これは放射長と非常によく似ていて、(2.81)と比較すると $\lambda_{\text{pair}} \approx \frac{7}{9} L_{\text{rad}}$

2.7.4 Electron-Photon Showers

高エネルギーの光子が物質に入ると、 e^+e^- 対生成が起こる。生成した e^+e^- 対は制動放射によって光子を出す。この過程が交互に繰り返されて、これは e^+e^- 対が物質との相互作用によってエネルギーを失うことで止まる。これを光子、電子、陽電子の「カスケード」(シャワー)と呼ぶ。

生成粒子の平均数、平均エネルギーを示す簡単なモデル



平均数	2 (= 2 ¹)	4 (= 2 ²)	8 (= 2 ³)	...	2 ^t
平均エネルギー	E ₀ /2	E ₀ /4	E ₀ /8	...	E ₀ /2 ^t

粒子の合計数 N を表す式は

$$N \approx 2^t \tag{2.124}$$

それぞれの段階における平均エネルギーを表す式は

$$E(t) \approx \frac{E_0}{2^t} \tag{2.125}$$

「カスケード」の最大侵入長について考える。臨界エネルギー E_c でシャワーが止まると仮定すると、臨界エネルギーは

$$E(t_{max}) = \frac{E_0}{2^{t_{max}}} = E_c \tag{2.126}$$

のように表われて、これを t_{max} について解けば、

$$t_{max} = \frac{\log \frac{E_0}{E_c}}{\log 2} \tag{2.127}$$

このときの生成粒子の最大数は

$$N_{max} \approx \frac{E_0}{E_c} \tag{2.128}$$

このモデルでは、粗い評価しかできないため、より正確な評価を行うには、モンテカルロシミュレーションなどが必要となる。

④ 正しい評価に基いた結果 (図 2.26)

・ 鉄、30 GeV の電磁カスケード

・ ○ ... 電子数、□ ... 光子数 を表す

・ 横軸は放射長の深さ、縦軸はシャワーによって失ったエネルギー $\frac{dE}{dt}$ とする

電子、光子カスケードにおいて、粒子数ははじめ指数関数的に上昇し、最大値前後は幅が広く、ゆるやか。放射長の深さが大きくなっていくと、さらにゆるやかに減少する。先ほどの粗いモデルでは反応は急に止まるものとしていたが、これはその点で異なる。

注意点 この評価法ではカスケードの平均のふるまいを表している。

制動放射が伴うときは大きな変動が生じうるので、そのときは個々のシャワーから与えられるあらゆる影響が、観測される平均に対して大きな偏差を生じる。

最初の放射長を過ぎると、エネルギー損失 $\frac{dE}{dt}$ はガンマ分布で fit されて

$$\frac{dE}{dt} = E_0 b \frac{(bt)^{a-1} e^{-bt}}{\Gamma(a)} \quad (2.129)$$

(a, b は物質に依存するパラメータ)

最大値が発生する深さは二次式のように与えられる。

$$t_{max} = (a-1) / b = 1.0 \times (\log \gamma + C_i), \quad (i = e, \gamma) \quad (2.130)$$

ここで、 $\gamma = E/E_c$ は臨界エネルギー単位での電子、光子の入射エネルギー

$C_e = -0.5$ 電子誘起カスケード

$C_\gamma = +0.5$ 光子誘起カスケード

(2.129) を計算するには、一つは (2.130) を使用して t_{max} を計算しなければならない。

$b \approx 0.5$ と仮定するか、図 2.27 を使ってさらに正確な値を選んでもらう。

(2.130) のはじめの関係式を用いて a が求まる。

次に、シヤワ-の(進行方向に^対する)横方向のながりを考える。電磁シヤワ-の横方向のながりが最も手軽に測れるものとして、モリエール半径があり、次のように定義される。

$$R_M = L_{rad} \frac{E_s}{E_c} \quad (2.131)$$

$$\text{ここで、} E_s = m_e c^2 \sqrt{4\pi/\alpha} = 21.2 \text{ MeV}$$

E_c : 臨界エネルギー

- ・ モリエール半径は大雑把にいえ、物質の種類に依らない。
- ・ L_{rad} と同様に、化合物・混合物に^対するモリエール半径は Bragg ールを用いて計算できる。

2.7.5 The Total Absorption Coefficient and Photon Attenuation

1 原子あたりの断面積は、次の式で表わされる。

$$\sigma = \underbrace{\sigma_{\text{photo}}}_{\text{光電効果}} + \underbrace{Z\sigma_c}_{\text{コンプトン散乱}} + \underbrace{\tau}_{\text{対生成}} \quad (2.132)$$

(Z : 1 原子あたりの電子数)

また、全吸収係数は原子密度 N と σ の積で表わされ、

$$\mu = N\sigma = \sigma(N_A\rho/A) \quad (2.133)$$

$$\left(\begin{array}{l} N_A: \text{アボガドロ数} \\ \rho: \text{物質の密度} \\ A: \text{分子量} \end{array} \right)$$

これは光子の平均自由行程とは逆なので、距離 x 通りぬけた光子の割合は

$$I/I_0 = \exp(-\mu x) \quad (2.134)$$

(I_0 : 入射強度)

化合物や混合物においては、全吸収係数は Bragg ルールにより計算される。

その式は、

$$\frac{\mu}{\rho} = w_1 \frac{\mu_1}{\rho_1} + w_2 \frac{\mu_2}{\rho_2} + \dots \quad (2.135)$$

ここで、 w_i は化合物内でのそれぞれの元素の重量割合である。

2.8 中性子の相互作用

中性子には電荷がないので電磁相互作用は働かない。その代わりに、原子核と強い相互作用を起こす。これらの反応はこの力が作用する距離が短いため比較的起こりにくい。中性子は反応が起こる前に原子核の 10^{-13}cm 以内に入らなければならない。通常の物質は主に真空なので、中性子は非常に貫通力のある粒子として観測されるのは驚くことではない。

しかし、中性子が相互作用をするときには、そのエネルギーに応じて様々な過程がある。以下にそれらを示す。

- 1) 原子核との弾性散乱、すなわち、 $A(n,n)A$ 。これは MeV 領域での中性子のエネルギー損失の主要なメカニズムである。
- 2) 非弾性散乱、例えば、 $A(n,n')A^*$ 、 $A(n,2n')B$ など。この反応では、原子核は励起状態となって、その後、ガンマ線や他の放射線を出して、崩壊することができる。非弾性散乱が起こるためには中性子は原子核の励起に十分なエネルギー（通常は 1MeV かそれ以上のオーダー）を持たなくてはならない。このエネルギー数値未満では弾性散乱のみが許される。
- 3) 放射性の中性子捕獲、すなわち、 $n + (Z, A) \rightarrow \gamma + (Z, A + 1)$ 。一般的に中性子捕獲の断面積は、おおよそ、中性子の速さを v として $1/v$ である。それゆえ吸収は低いエネルギーでもっとも起こりやすい。これに従い、この $1/v$ 依存性に付随する共鳴のピークも存在できる。これらのエネルギーではもちろん、中性子捕獲の確率は非常に高まる。
- 4) (n, p) , (n, d) , (n, α) , (n, t) , (n, cp) などの中性子を捕獲して、荷電粒子を放出する反応。これらは一般に eV から keV の領域で起こる。放射性の捕獲反応と同じように断面積は一般に $1/v$ のようになる。共鳴はこの要素に従って起こることも許される。
- 5) 分裂、すなわち、 (n, f) 。これは熱エネルギーでもっともよく起こる。
- 6) 高エネルギーのハドロンシャワーの生成。これは 100MeV を超える非常に高いエネルギーの中性子の下でしか起こらない。

中性子の相互作用の強いエネルギー依存性より、明確に境界があるわけではないが、そのエネルギーによって中性子を分類することは慣習的なことである。一般に、高エネルギーの中性子は 100MeV 程度を超えるものと考えられる。一方、数十 MeV と数百 keV の中性子は“速い”(fast) 中性子として知られている。原子核共鳴が起こる、100keV と 0.1eV の間辺りでは中性子は *epithermal* と呼ばれる。室温での熱運動エネルギー ($E \approx kT \approx 1/40\text{eV}$) より低いエネルギーでは *thermal*, *slow* として知られている。更に低エネルギーの meV や μeV では、中性子は *ultra* や *ultra-cold* と呼ばれている。

熱中性子

速中性子

Cold
冷中性子
超冷中性子

熱中性子

物質中で中性子が相互作用を起こす確率は断面積の和で表わされる。

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{elastic}} + \sigma_{\text{inelastic}} + \sigma_{\text{capture}} + \dots \quad (2.136)$$

図 2.30 はいくつかの物質での中性子に対する反応断面積と中性子のエネルギーの関係を表わしている。ここで、エネルギー依存性は非常に滑らかである。

(2.136) に原子密度を掛けると、平均自由行程が得られる。

$$\frac{1}{\lambda} = N\sigma_{\text{tot}} = \frac{N_a \rho}{A} \sigma_{\text{tot}} \quad (2.137)$$

光子の類推から物質を通過する中性子ビームは指数関数的に減少し、

$$N = N_0 \exp(-x/\lambda) \quad (2.138)$$

となるであろう。ここで x は物質の厚さである。もちろんこの式が成り立つのは平行な中性子ビームについてであって、平行でない場合には、普通、複雑な式が必要になる。

2.8.1 中性子の減速: Moderation

速い中性子が減速することは、*moderation* と呼ばれ、原子核物理や原子核工学において重要な過程である。ほとんどの場合、物質に入射した速い中性子は周りの原子と熱平衡状態になるまで、エネルギーを失いながら散乱する。ここで、中性子は最終的に原子核に捕獲されるか、他の原子核反応（例えば核融合）を起こすまで拡散を続けるであろう。もちろん中性子は、特に共鳴がある場合には、熱エネルギーに達する前に原子核反応を起こすか、捕獲されるかされ得る。しかし、このような反応を除けば断面積の v^{-1} 依存性は中性子が熱的速度まで存在することを後押しする。

分裂

弾性散乱は速い中性子に対するエネルギー損失の主要なメカニズムである。数 MeV のエネルギーでは、問題は非相対論的に扱え、保存則によって、非常に単純に扱える。よって、実験室系において質量数 A の原子核が止まっていて、そこに速さ v_0 の中性子をぶつけることを考えると、重心系での中性子の速さは

$$v_{\text{cm}} = \frac{A}{A+1} v_0 \quad (2.139)$$

原子核の速さは

$$V = \frac{1}{A+1} v_0 \quad (2.140)$$

重心系で見れば衝突前後で各粒子の速さは変わらず、方向を変えることを考慮に入れると、衝突後の実験室系での中性子の速さは

$$(v_{\text{lab}})^2 = (v_{\text{cm}})^2 + V^2 - 2v_{\text{cm}}V \cos(\pi - \theta_{\text{cm}}) \quad (2.141)$$

ここで θ_{cm} は重心系の散乱角である。(2.139) と (2.140) を (2.141) に代入すると

$$(v_{\text{lab}})^2 = \left(\frac{A}{A+1}\right)^2 v_0^2 + \left(\frac{1}{A+1}\right)^2 v_0^2 - 2\frac{A}{(A+1)^2} v_0^2 \cos(\pi - \theta_{\text{cm}}) \quad (2.142)$$

運動エネルギーは $E = \frac{1}{2}mv^2$ なので

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{v_{\text{lab}}}{v_0}\right)^2 = \frac{A^2 + 1 + 2A \cos \theta_{\text{cm}}}{(A+1)^2} \quad (2.143)$$

同様にして

$$(v_{\text{cm}})^2 = (v_{\text{lab}})^2 + V^2 - 2v_{\text{lab}}V \cos \theta_{\text{lab}} \quad (2.144)$$

(2.142) を使って

$$\cos \theta_{\text{lab}} = \frac{A \cos \theta_{\text{cm}} + 1}{\sqrt{A^2 + 1 + 2A \cos \theta_{\text{cm}}}} \quad (2.145)$$

続いて、反跳原子核に対する

$$E_A = E_0 \frac{4A}{(A+1)^2} \cos^2 \phi_{\text{lab}} = E_0 \frac{2A}{(A+1)^2} (1 + \cos \phi_{\text{cm}}) \quad (2.146)$$

$$\cos \phi_{\text{lab}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \phi_{\text{cm}}}{2}} \quad \text{or} \quad \phi_{\text{lab}} = \frac{1}{2} \phi_{\text{cm}} \quad (2.147)$$

(2.143) より

$$\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0 < E < E_0 \quad (2.148)$$

原子核が陽子の場合は $A = 1$ なので

$$0 < E < E_0$$

原子核が軽いほど受ける反跳エネルギーは大きいので、陽子や軽い原子核を使うのが、中性子の減速には最も効率が良い。これが中性子の減速と防護に水やパラフィン (CH_2) を使う理由である。次に散乱中性子のエネルギー分布を考える。15MeV 以下の高すぎないエネルギーでは中性子散乱は通常等方的な s 波に制限される。このとき立体角 $d\Omega$ に散乱される確率は

$$dw = \frac{d\Omega}{4\pi} = 2\pi \sin \theta_{\text{cm}} \frac{d\theta_{\text{cm}}}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \theta_{\text{cm}} d\theta_{\text{cm}} \quad (2.149)$$

しかし、(2.143) より

$$\frac{dE}{E_0} = 2 \frac{A}{(A+1)^2} \sin \theta_{\text{cm}} d\theta_{\text{cm}} \quad (2.150)$$

(2.149) を代入し、

$$\frac{dw_1}{dE} = \frac{(A+1)^2}{4A} \frac{1}{E_0} = \frac{1}{E_0(1-\alpha)} \quad (2.151)$$

ここで $\alpha = [(A-1)/(A+1)]^2$ である。それゆえ、単一エネルギーの中性子が一回散乱した後のエネルギー分布は (2.148) で与えられた範囲で一定である。

この結果から二回散乱した後の分布が分かる。

$$\frac{dw_2}{dE} = \begin{cases} \int_E^{E_0} d\epsilon \frac{dw_1}{d\epsilon} \frac{1}{\epsilon(1-\alpha)} = \frac{1}{E_0(1-\alpha)^2} \ln \frac{E_0}{E} & \alpha E_0 < E < E_0 \\ \int_{\alpha E_0}^{E/\alpha} d\epsilon \frac{dw_1}{d\epsilon} \frac{1}{\epsilon(1-\alpha)} = -\frac{1}{E_0(1-\alpha)^2} \left[\ln \frac{E_0}{E} + 2 \ln \alpha \right] & \alpha^2 E_0 < E < \alpha E_0 \end{cases} \quad (2.152)$$

三回目の衝突についても同様に計算して

$$\frac{dw_3}{dE} = \begin{cases} \frac{1}{2E_0(1-\alpha)^3} \left(\ln \frac{E_0}{E} \right)^2 & \alpha E_0 < E < E_0 \\ -\frac{1}{2E_0(1-\alpha)^3} \left[2 \left(\ln \frac{E_0}{E} \right)^2 + 6 \ln \alpha \ln \frac{E_0}{E} + (\ln \alpha)^2 \right] & \alpha^2 E_0 < E < \alpha E_0 \\ \frac{1}{2E_0(1-\alpha)^3} \left(\ln \frac{E_0}{E} + 3 \ln \alpha \right)^2 & \alpha^3 E_0 < E < \alpha^2 E_0 \end{cases} \quad (2.153)$$

更に、多くの衝突に対しての分布も同様にして得られる。図 2.32 は数回衝突したとの分布を比較したものである。Condon と Breit は水素での n 回散乱後の分布について以下の公式を与えた。

$$\frac{dw_n}{dE} = \frac{1}{E_0(n-1)!} \left(\ln \frac{E_0}{E} \right)^{n-1} \quad (2.154)$$

ここで起こる疑問は中性子の平均エネルギーが与えられた値になるには何回衝突が必要かということである。ここで

$$\mu = \ln E_0 - \ln E = \ln \frac{E_0}{E} \quad (2.155)$$

とする。これは“不活発”(lethargy) 変位として知られている。これと (2.143) より

$$\mu(\theta) = \ln \frac{(A+1)^2}{A^2 + 1 + 2A \cos \theta} \quad (2.156)$$

(2.156) を全ての方向について足し合わせ、 4π で割ると、一回衝突に対する平均の $\mu(\theta)$ は

$$\begin{aligned} \xi = \langle \mu(\theta) \rangle &= \int \mu(\theta) \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \ln \frac{(A+1)^2}{A^2 + 1 + 2A \cos \theta} d(\cos \theta) \\ &= 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1} \end{aligned} \quad (2.157)$$

これから、平均不活発変位は一回の散乱では最初のエネルギーによらない定数であることが分かる。中性子がエネルギー E_0 から E' にエネルギーを下げる時不活発変位は $\ln(E_0/E')$ であり、一回の衝突あたりの不活発変位は ξ なので、このときの衝突回数は以下になるであろう。

$$n = \frac{\mu}{\xi} = \frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E'} \quad (2.158)$$