

## 4.6 Propagation of Errors

計測データの誤差はそこから計算される量にも持ち越される。(誤差の伝播)

$x, y$  という誤差  $\sigma_x, \sigma_y$  を含む量の関数  $u = f(x, y)$  を考える。  
 記述される量  $u$  の標準偏差を  $\sigma_u$  とすると

$$\sigma_u^2 = E[(u - \bar{u})^2] \quad (4.61)$$

一次近似では  $u$  の平均値  $\bar{u}$  は  $f(\bar{x}, \bar{y})$  とみなせる。

(1)  $u_i = f(x_i, y_i)$  ( $i=1 \dots N$ ) とする

一次近似 (1.5) ( $\bar{x} \sim x_i, \bar{y} \sim y_i$ )

$$u_i \approx f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_i - \bar{y})$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ f(\bar{x}, \bar{y}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_i - \bar{x}) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(y_i - \bar{y}) \right]$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \text{ を用いると}$$

うしろの2項は消えるので

$$\bar{u} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) //$$

$(u - \bar{u})$  を一次まで展開すると

$$(u - \bar{u}) \approx (x - \bar{x}) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}} + (y - \bar{y}) \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{y}} \quad (4.62)$$

(4.62) の2乗から (4.61) は

$$E[(u - \bar{u})^2] \approx E \left[ (x - \bar{x})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + (y - \bar{y})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2(x - \bar{x})(y - \bar{y}) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

分散・共分散の定義から

$$(4.63)$$

$$\sigma_u^2 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2 \text{cov}(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4.64)$$

これは  $x$  と  $y$  の誤差の 2 乗に比例する項と  
 共分散の項を定しあわせた形になっている。  
 共分散の大きさや符号は  $\sigma_u$  に大きく影響を  
 与えるが一般的にほとんどの物理の実験では  
 計測される量はほとんど独立であるが共分散が  
 0 になるように設定されるのでこの式はずっと簡単になる。

共分散が問題になるのは 2 つ以上のパラメータを  
 同じデータから計算するとき。  
 例えば

- フィットングを行ったときに得られたパラメータ
  - データから推定された平均や分散 (ガウシアンは OK)
- など。  
 こうした相関は生のデータが独立であっても現れる。

#### 4.6.1 Example

まずは  $f(x, y)$  が  $x, y$  の和差積商であったときを  
 考える。(4.64) より

i) 和  $u = x + y$  のとき

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2 \text{cov}(x, y) \quad (4.65)$$

ii) 差  $u = x - y$  のとき

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \text{cov}(x, y) \quad (4.66)$$

共分散が 0 なら i) と ii) は同じ結果を与えるが  
 相対誤差  $\sigma_u/u$  については ii) の方が大きく  
 なる (まあ  $(x, y)$  は正?)  
 二のため、可能な限り差は直接計測される。

iii) 積  $u = xy$  のとき

$$\sigma_u^2 \approx y^2 \sigma_x^2 + x^2 \sigma_y^2 + 2 \text{cov}(x, y) xy$$

$$\frac{\sigma_u^2}{u^2} \approx \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} + 2 \frac{\text{cov}(x, y)}{xy} \quad (4.67)$$

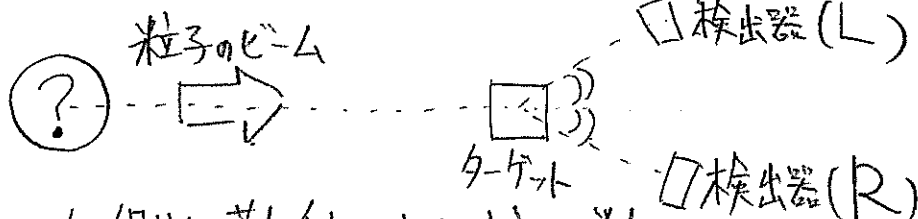
iv) 商  $u = \frac{x}{y}$  のとき

$$\sigma_u^2 \approx y^{-2} \sigma_x^2 + x^2 y^{-4} \sigma_y^2 - 2 \text{cov}(x, y) x y^{-3}$$

$$\frac{\sigma_u^2}{u^2} \approx \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} - 2 \frac{\text{cov}(x, y)}{xy} \quad (4.68)$$

積・商の相対誤差は共分散の符号をのぞいて同じ形。(4.68)は相対誤差が非常に大きい時以外は一般に正しい。しかし小さい数の比を計算するときには不十分。

Example 4.6 偏陽子や中性子の分極を古典的な方法で計測する



ターゲットの右側に散乱された粒子数をR、左側に散乱された粒子数をLとしてそれらの非対称性をあらわす量

$$\varepsilon = \frac{R-L}{R+L}$$

を計算する。このときの $\varepsilon$ の誤差をRとLの関数としてあらわしたい。

(4.64)の通りに計算すると  $N_{\text{tot}} = R+L$  として

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} = \frac{2L}{N_{\text{tot}}^2}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial L} = -\frac{2R}{N_{\text{tot}}^2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2(\varepsilon) \approx \frac{4L^2}{N_{\text{tot}}^2} \sigma_R^2 + \frac{4R^2}{N_{\text{tot}}^2} \sigma_L^2$$

RとLは独立に計測されているので共分散は0。  
RとLはポアソン分布に従っているので  
 $\sigma_R^2 = R$ 、 $\sigma_L^2 = L$  とすると

$$\sigma^2(\varepsilon) \approx 4 \frac{(L^2 R + R^2 L)}{N_{\text{tot}}^4} = 4 \frac{RL}{N_{\text{tot}}^3}$$

±1 の非対称性が十分小さくて  $R \approx L \approx \frac{N_{\text{tot}}}{2}$  とみなせるなら

$$\sigma(\varepsilon) \approx \sqrt{\frac{1}{N_{\text{tot}}}}$$

## 4.7 Curve Fitting

実験によって計測した量  $y$  を変数  $x_1, x_2, \dots$  の関数として記述するためにはデータ点を適切なパラメータでフィッティングする必要がある。  
 例えは放射線源からの単位時間あたりの線量  $N_1, N_2, \dots, N_n$  と時刻  $t_1, t_2, \dots, t_n$  の間には

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\tau) \quad (4.69)$$

という関係が成り立つはずである。

カウント率には統計的なゆらきがあるのでデータ点をつないでもなめらかな曲線にはならない。  
 $\sigma_{N_i} = \sqrt{N_i}$  = ポアソン分布)

それではどのようにして最も適切な  $\tau$  や  $N_0$  といったパラメータを決定すればよいか。

そのための最も有用な方法に最小二乗法がある

### 4.7.1 The Least Squares Method

$n$  回変数  $x_i$  を変えて  $y_i$  を測定し、その測定の誤差を  $\sigma_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) とする。このとき  $y = f(x; a_1, a_2, \dots, a_m)$  というように  $m$  個のパラメータで  $y$  を記述するには最小二乗法に従って

$$S = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i; a_j)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (4.70)$$

この  $S$  を最小にするように  $a_j$  をえらべばよい。

(4.70)をよく見ると、これはデータ点の曲線からのずれの2乗にそれぞれデータの誤差による重みをつけて足しあわせたものを、カイニとも呼ばれる。厳密には  $\chi^2$  がガウス分布に従っていて平均が  $f(x_j; a_j)$  の分散が  $\sigma_j^2$  のときカイニ長となるのだが物理ではほとんどの場合、そのようにみなせる。最小二乗法は母集団について情報がなくとも使える一般的な方法である。母集団について知っている場合は最大法も用いられるが母集団がガウス分布であれば同じ結果を与える。

$a_2$  を知るためには

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \quad (4.71)$$

のような方程式を解く必要がある。 $f(x)$  によつては解析的に解けないのでコンピュータが必要になる。

こうして求めたパラメータの誤差を知るためには以下のように定義される誤差共分散行列  $V_{ij}$  を用いる。

$$(V_{ij}^{-1}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial a_j}$$

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(1,2) & \text{cov}(1,3) & \dots \\ \cdot & \sigma_2^2 & \text{cov}(2,3) & \dots \\ \cdot & \cdot & \sigma_3^2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}$$

$$a_j \text{ の誤差} = \sigma_j$$

$$a_i, a_j \text{ の共分散} = \text{cov}(i, j)$$

## 4.7.2 Linear Fits, The Straight Line

フィッティングに用いる関数が  $a_i$  に関して線型のみ  
( $G_2$  から積商を含まないとき)、(4.71) は  
解析的に解くことが出来る。  
特に  $a, b$  をパラメータとした直線

$$y = f(x) = ax + b \quad (4.74)$$

2 フィッティングする場合は

$$S = \sum \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\sigma_i^2} \quad (4.75)$$

$a$  と  $b$  についての偏微分(分母)

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum \frac{(y_i - ax_i - b)x_i}{\sigma_i^2} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum \frac{(y_i - ax_i - b)}{\sigma_i^2} = 0$$

(4.76)

簡単のため  $\times$

$$A = \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}$$

$$B = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$C = \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}$$

$$D = \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$$

(4.77)

$$E = \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$$

$$F = \sum \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}$$

よって (4.76) は

$$2(-E + aD + bA) = 0$$

$$2(-C + aA + bB) = 0$$

(4.78)

$a, b$  について解く

$$a = \frac{EB - CA}{DB - A^2}$$

$$b = \frac{DC - EA}{DB - A^2}$$

(4.79)

さらに  $a, b$  についての誤差を求めるために  
誤差共分散行列を計算する

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

$$A_{11} = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 S}{\partial a^2}, \quad A_{22} = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 S}{\partial b^2}, \quad A_{12} = A_{21} = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{12} & A_{11} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

$V$  の定義から

$$\sigma^2(a) = \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = \frac{B}{D - A^2}$$

$$\sigma^2(b) = \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = \frac{D}{D - A^2} \quad (4.82)$$

$$\text{cov}(a, b) = \frac{-A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = \frac{-A}{D - A^2}$$

このフィッティングの正しさはカイ二乗から評価する  
ことができる。

もしデータがフィッティングに用いた関数が完全に  
記述され、ガウス分布でばらついていいるなら  
カイ二乗は自由度と等しくなるはずである。

自由度  $\nu$  はデータの数を  $n$ 、フィッティング  
のパラメータの数を  $m$  とすると

$$\nu = n - m$$

で定義される。もし  $S$  が  $\nu$  程度 (この場合は  
 $m=2$  ( $a, b$ ) なので  $n-2$  程度) であれば  
フィッティングはよいものだったといえる。  
あるいは以下のような換算カイ二乗について

$$\frac{\chi^2}{\nu} = \frac{S}{\nu} \quad (4.83)$$

これが 1 程度であればよいフィッティングであるといえる。

より厳密にはカイ二乗が  $S$  より大きくなる確率から  
フィッティングを評価しなければならぬ。  
得られた  $S$  よりも大きなカイ二乗を与える  
確率があまりにも小さければフィッティングは  
疑わしいものとして棄却しなければならぬ。  
一般的にはその線引きを確率 5% で  
行う。

また  $S$  があまりに小さいときも注意が必要である。  
なぜならデータにはゆらぎが含まれているはず  
だからだ。これは偽造されたデータを使っている  
のでなければ大半は誤差を過剰に見積っている  
ことが原因である。  
エラーバーの長さが 1 ののであればガウス分布から  
 $\frac{1}{3}$  程度の確率で 1 のに収まらないデータがあらわれる  
はずなので、 $\frac{1}{3}$  程度のデータ点がフィットからはずれて  
いるのはむしろ自然なことである。



吉池

例 4.7 直線の fitting

$x$	0	1	2	3	4	5
$y$	0.92	4.15	9.98	14.46	19.26	21.90
$\sigma$	0.5	1.0	0.75	1.25	1.0	1.5

$y = ax + b$  とし  $x=0 \sim 5$  の  $a, b$  を設定して、(4.75) ~ (4.82) におけるように最小二乗法で求める

$a = 4.227$  ,  $b = 0.878$   
 $\sigma^2(a) = 0.044$  ,  $\sigma^2(b) = 0.203$  ,  $\text{cov}(a, b) = -0.0629$

fitting の正当性を見るために  $\chi^2$  を計算すると。  
 自由度 4 で  $\chi^2 = 2.078$   
 (4.23) 式で  $\chi^2 > 2.07$  となる確率を計算すると。  
 $P(\chi^2 > 2.07) \approx 97.5\%$   
 となるので、十分許容できる。

例 4.8

直線でない関数に、線型最小二乗法を適用するためには線型近似が用いられる。  
 例として (4.69) 式の崩壊する線源の 15 秒毎の放射線の計測数を調べる

$t$ (s)	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135
$N$ (counts)	106	80	98	75	74	63	44	38	37	22

この線源の寿命を計算するために決めるために、これを  $N = N_0 e^{-\lambda t}$  と (4.69) で fitting (ただし (4.69) は明らかに直線ではない)。  
 しかし、両辺の  $\ln$  をとると直線型化できる。

$$\ln N = -\frac{\lambda t}{T} + \ln N_0$$

$y = \ln N$ ,  $a = -\frac{\lambda}{T}$ ,  $b = \ln N_0$  とし、与えられたデータで同様に計算をする。  
 ここで誤差の扱いに注意しなければならない。  $N$  の統計誤差はポアソン分布に従うので  
 $\sigma(N) = \sqrt{N}$ , したがって  $\ln N$  の誤差を扱うので、誤差の伝播の式を用いて、

$$\sigma^2(\ln N) = \left(\frac{\partial \ln N}{\partial N}\right)^2 \sigma^2(N) = \frac{1}{N}$$

これを (4.75) ~ (4.82) に基づいて計算する。

$$a = -\frac{1}{\tau} = -0.008999, \quad \sigma(a) = 0.001$$

$$b = \ln N_0 = 4.721, \quad \sigma(b) = 0.064$$

寿命は  $\tau = 111 \pm 12(s)$  とする。

自由度  $\nu$ ,  $\chi^2 = 15.6$  となり,  $\chi^2/\nu \approx 1.96$  といくぶん大きいから, この fitting を許容できるものとする。この fit した直線が Fig 4.7 である。

Fig 4.7 を見ると,  $\pm\sigma$  のエラーバーが直線にぶれていないものがあるが, Fig 4.5 から分かるように,  $\pm\sigma$  の領域はほぼ又分布の 68% しか含まないため, 3割程度の点が直線から外れていて結果に矛盾はない。

$\chi^2$  が大きいのは fit した関数に問題があったと考えられる。例えば, 定数のバックグラウンドを考慮して。

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c$$

他にも1つの崩壊が指数関数の和で表現されている場合などもあるが, これらの場合, 線型化することはできなくなってしまう。

#### 4.7.3 両方の変数が誤差を伴っているときの線型 fitting.

これまで,  $x$  の誤差は  $y$  の誤差に比べて小さく無視できる場合を考えていたが, いずれの誤差も無視できない場合を考える。このような問題では 有効分散法が用いられる。この場合は, (4.70) における  $\sigma_i$  を以下のように置き換えるだけである。

$$\sigma_i^2 \rightarrow \sigma_y^2 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \sigma_x^2 \quad (4.84)$$

ここで,  $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  はそれぞれの分散である。

導関数は  $a_j$  の関数なので, これは非線型で, 最小化するためには数値解析をしなければならない。

#### 4.7.4 非線型 fitting

非線型な関数に fitting するとき,  $S$  を最小化するのは数値解析的な手法が必要。全ての関数に適用できる方法があるわけではなく, 問題としている関数ごとに正しい方法を見つけなければならない。

#### 関数最小化の技術

この方法は一般的に, 期待される最小値に近づくまでパラメータを変えて計算するというように, 反復的な性質を持っている。そのため方法を選択する基準は必ずしも発散に対する安定性である。一般的に格子法と勾配法に大別される。

↳ 無限に発散する場合もある  
 のでこれは避ける。

## 格点法

$F(x)$  を最小化したい場合は  $x = x_0, x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x, \dots$  のように同じ肉隔を空けた点をとり、それぞれで  $F$  を評価すればよい。このとき幅  $\Delta x$  は欲しい正確さによって決まる。また  $x$  の範囲が有限でないと適用できない。しかしこのような初歩的な格点法は 2 次元以上では、評価する関数が多くなり役に立たない。

より有効な方法にシンプレックス法がある。シンプレックス法は、 $n$  次元において、 $n+1$  の頂点を持つ最も単純な幾何学的図形である ( $n=2 \dots$  三角形,  $n=3 \dots$  四面体)

シンプレックス法は、それぞれ  $n$  の段階で  $n+1$  の点を使う。2 次元の場合を考えたのが Fig 4.8 である。まず 3 点を選んで、関数の値が最大になった点を  $P_H$ 、最小になった点を  $P_L$  とし、次に  $P_H$  を除いた点の重心

$$\bar{P} = \sum_i \frac{P_i - P_H}{n} \quad (4.85)$$

$P_L$  に対し  $P_H$  と対称な点を  $P^* = \bar{P} + (\bar{P} - P_H)$  とする。

$F(P^*) < F(P_H)$  の場合は、 $P^*$  が新たな最小の点となり、 $P^{**} = \bar{P} + 2(\bar{P} - P_H)$  のようにより良い点を探す。 $F(P^*) > F(P_H)$  の場合は、 $P^{**} = \bar{P} - \frac{1}{2}(\bar{P} - P_H)$  とする。これでも  $F(P^{**}) > F(P_H)$  であれば新たに  $P_i = \frac{1}{2}(P_i + P_L)$  とし、同じ操作をする。これを繰り返すことで Fig 4.8 の三角形は最小へと落ちていく。この方法は、比較的関数の型に左右されない良い方法であるがまだ遅い。

## 勾配法

関数を最小化するために、その関数の導関数を用いられる。これは、関数  $F$  が減少する方向を示すのに役立つ。これは最速降下法と呼ばれる方法に用いられ、2 次元の平面上で用いたニュートン法が広く使われている。

$$F(x) \approx F(x_0) + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 \quad (4.86)$$

$n$  次元で一般化する。

$$F(x) \approx F(x_0) + \mathbf{g}^T (x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T \mathbf{G} (x - x_0) \quad (4.87)$$

$$\mathbf{g}: \text{ベクトル}, g_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \mathbf{G}: \text{行列}, G_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{ヘッセ行列})$$

この方法では 2 次元曲面上で  $x_0$  のまわりに近似しており、これを仮定すると、 $n$  次元放物線最小値は簡単に求め、最小を与える  $x$  は

$$x_{\min} = x_0 - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{g} \quad (4.88)$$

もちろんこれは真の最小値ではないが  $x_0$  を  $x_{\min}$  に近づけて同様の計算を繰り返せば、今よりも速く真の最小値へと収束する。この方法の肉点とは  $\mathbf{G}$  の各値が、全ての点で

正の数で定義されなければならない。(4.86)を見れば明らかだが、 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0$  であれば、最小値が定義できない。

この欠点を改善するために、 $G$ の値がいつでも負に存在するように人為的に変え、このやり方で正で定義されるような範囲になるまで、計算を繰り返す方法(準ニュートン法)が採られた。最小二乗法の特定の場合作は、fitting関数の直線化という手順がニュートン法で使われる。これは、以下の5行にヘッセ行列を近似するのと同等である。

$$J = \sum_k S_k^2, \quad S_k = \frac{y_k - f(x_k)}{\sigma_k} \quad (4.89)$$

このヘッセ行列は

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_k S_k^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k 2S_k \frac{\partial S_k}{\partial x_j} = 2 \sum_k \left( \frac{\partial S_k}{\partial x_i} \frac{\partial S_k}{\partial x_j} + S_k \frac{\partial^2 S_k}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (4.90)$$

第2項は、2次のオーダーの補正と考えられ、0とすると

$$G_{ij} \approx 2 \sum_k \frac{\partial S_k}{\partial x_i} \frac{\partial S_k}{\partial x_j} \quad (4.91)$$

この近似は、 $G_{ij}$ の正定値性を保証し、正しい最小値へと収束する。しかし、共分散行列は、一般に正しい値には収束しないので、この行列が決められた言葉では正しくない。

### 局所的な最小 vs 大域的な最小

今までは、関数 $F$ は1つの最小値を持つと考えてきたが、より一般には、任意の関数は、多くの局所的な最小を持つ、さらに大域的な最小を持つ。得られた最小が欲しい最小か、どうかの判断は自分でなければならぬ。それゆえ、本当の値を得るために、正しい範囲で計算を始める方法は重要だが、最も近い最小値へと収束することを保証しているわけではない。よい方法は、近似的に知られているパラメータを止めて、残りを逐次変えて計算することをおこなうこと、全てのパラメータを動かす方法である。

### 誤差

誤差の計算方法を知らずには次元の場合を考えた。パラメータ $\theta$ の分散は(4.92)より

$$\sigma^2 = \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \right|^{-1} \quad (4.92)$$

$J$ を最小とする $\theta$  ( $= \theta^*$ )のまわりを1次元展開すると

$$J(\theta) \approx J(\theta^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} (\theta - \theta^*)^2 = J(\theta^*) + \frac{1}{\sigma^2} (\theta - \theta^*)^2 \quad (4.93)$$

$\theta = \theta^* + \sigma$  とすると

$$J(\theta^* + \sigma) = J(\theta^*) + 1 \quad (4.94)$$

82.  $\theta$  の誤差は、 $\delta$  の最小値とそこから増加した値をとるときの  $\theta$  の距離と一致している。

非線形型の場合にも一般化すると、それぞれのパラメータの誤差を決めることは、 $\delta$  の値を1変える点を見つけることである。 $\delta$  が複雑な場合これは簡単ではないが、 $\delta$  の形が二次曲面に近似できるときは、誤差行列 (4.73) を計算することができ、これにより、誤差と分散の推定値が得られるはずである。

## 1 abstract

この実験は mott 散乱を利用した内部転換電子の偏極を解析する。 $\beta$  崩壊の電子は内部転換と一緒に弱い相互作用によるパリティの破れのため偏極している。よって簡単に  $\beta$  電子の方向を図ることで簡単にスピンを測ることができる。

## 2 introduction

ベルの不等式を測る多くの実験は精度がよくても理論値からずれている。光子、電子陽電子、陽子陽子を使ったやり方などすべて量子力学を支持する  
しかし本当に量子力学が正しいのか？

1. これまですべての実験は局所性の原理通り配置されていない。
2. 確率はなにで構築されているのか？ どういう風にベルの不等式に影響しているのか？
3. スピン関連の実験はやっかいで、ベルの実験とは全く異なる実験手法が必要。

ここで  $\beta$  崩壊を使ったやり方を提案する。

### 2.1 $\beta$ 電子-内部転換電子 e 相関

図 1 を見る通り  $^{203}\text{Hg}$  は  $\beta$  崩壊して、 $^{203}\text{Tl}$  の励起状態になりさらに  $\gamma$  線か内部転換電子を放出して基底状態に落ちます、その際

$\beta$  電子 :速度方向にスピン偏極  
パリティの破れの結果

$$P_L = \langle \sigma \cdot \hat{v} \rangle = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} = -\left| \frac{v_\beta}{c} \right| = -\beta$$

$\beta$  電子のスピン偏極についてこれまで最も大きい統計偏差は  $\text{RaE}(^{210}\text{Bi})$  で 25 パーセント。ほかは数パーセント程度。よって  $P_L$  はとても大きい偏極。

$\beta$  電子の速度方向と垂直に飛び出す内部転換電子 e を測る。これは e の transverse 方向のスピン偏極をもたらす。スピン偏極の大きさは

$$P_T^e = K \left( \frac{v_\beta}{c} \right) \sin \theta_{\beta e}$$

$\theta_{\beta e}$  は  $\beta$  と e のなす角度でここではほぼ 90 度。

K は原子核構造による定数。決めるのは難しい。K の値は table1

K の値が異なる理由は分かっていない。多くの観測は mott 散乱を利用する手法である。mott 散乱は電子原子核の弾性クーロン散乱で重い原子核に電子をぶつけてその後方散乱を測る。mott 散乱は transverse 方向のスピン偏極に敏感で左右の検出器に非対称性をもたらす。

### 3 実験提案

Kの値は置いて、実験は singlet 状態の 2 電子を別々の detector で測る。その相関関数は角度  $\phi$  で指定でき、現時点ではわからないが実験で簡単に決定できる。triplet の影響が  $^{203}\text{Hg}$  があれば、別の原子核を選ぶべき。

実験原理は図 3 のように設置する。 $^{203}\text{Hg}$  の周りに  $\beta$  detector を置き、その真下に金の散乱結晶。そして後方散乱を測る  $e^-$  detector を置く。

この時  $\phi = \psi - \chi - \frac{\pi}{2}$

まず K を測る。K は  $\phi = 0$  の値。つまり内部転換電子 e の transverse 方向のスピンの偏極が  $\beta$  電子の速度方向と一緒にするとき。この実験は  $K(\phi = 0), K(\frac{\pi}{4}), K(\frac{\pi}{2})$  を同時に測る。多数の detector は統計性を増すだけでなく、器具由来の問題を消せる。e のエネルギー選択は pulse-height 後。この方法は日弾性散乱の効果を最小限に抑えられる。

ほかのシステム効果は (1) 線源での電子散乱 (2) 他の表面上での散乱 (3) オージェ効果 (4) 偶然的 coincidence (5) 宇宙線 (6)  $\beta - e$  の直接相関。

(4) は遅延技術で解決できる。(1) (2) は対照実験で (4) は Au の代わりに Al を使うことで測れる。Al では mott 散乱の偏極感度は Au より小さいのでもし直接相関があれば Au だけでなく Al にも表れるはず。  
方向の

このやり方を使った以前の実験では図 3 の装置は信頼に値する統計性をもたらした。

以前のやり方では  $K(0) = -0.31$ 。  $K(\frac{\pi}{2}) \approx 0$ 。

量子力学によれば、

$$K^{QM}(\phi = \frac{\pi}{4}) = K(\phi = 0) \cos \frac{\pi}{4}$$

隠れた変数理論では

$$|K^{HV}(\phi = \frac{\pi}{2})| \leq 0.5 \times |K(\phi = 0)|$$

これを測れば簡単にどちらの予想が正しいかがわかる。

これにはいくつかの仮定が必要

1. transmission や mott polarimeter の analyzing power の両方とも完璧の器具の場合に比べて小さい。これらは実験結果に影響しないと思われる。
2. これは光子を使った場合同様、量子効果に関する仮定。ここでは二つの観測はお互いに干渉しないと仮定する。つまり transmission と analyzing power は他方の polarimeter の観測にかかわらず一定とする。
3. triplet 効果。これは別の仮定が必要
4. この弱い相互作用を利用したスピンの偏極は bohm の実験と同等という仮定。

もし二つの観測は崩壊の瞬間にスピンの決定されることがないならば偏極の仮定は正当化される。 $\beta$  のスピン方向は、速度方向と一緒にであるが、上層の detector で観測されるまで決定されない。上層の detector は速度方向だけでなく、スピンも解析する。

この偏極過程は議論の余地があって、ゆえにベルの不等式の検証としての信ぴょう性が減るが、この方法では二つの偏極決定の軸を選べるようになる。K の決定やほかの原子核構造上の問題がまだ解決されていない。さらに上の仮定を厳密に議論が必要。

## 4.8 最終結果の丸め (端数処理) に関するいくつかの一般則

最後に、最終的な数値データの丸めに関する一般則を学ぶ。

有効数字は誤差によって決定される。例えば、測定、解析の結果が  $x = 17.615334$ 、誤差  $\sigma(x) = 0.0233$  であるとする。この誤差は、 $x$  が小数第 2 位程度の不確かさを持ち、それより下の桁は意味を持たないことを表している。そのため、結果は誤差に応じた桁で丸める。

丸めもまた計算誤差を生じる。計算結果を他の解析で更に丸めると丸め誤差が累積する。それを回避するため、数値は有意な 1 桁目まででなく、2 桁目まで保持する方が懸命である。上の例では、 $\sigma = 0.0233 \rightarrow 0.023$  となり、 $x$  は小数第 3 位まで意味を持つ。

丸めの一般的な方法は、まず、不要な桁の数を取り出して、その前に小数点をつける。(上の例では、 $x=17.615334$  の少数第 3 位までの  $17.615$  が有意な桁で、残りの桁から端数  $0.334$  を得る。)そして、

- 1) 端数が 0.5 より小さいなら、そのままにする
- 2) 端数が 0.5 より大きいなら、有意な最小桁の数を 1 増やす
- 3) 端数がちょうど 0.5 なら、有意な最小桁の数が奇数のとき 1 増やし、偶数のときそのままにする。

上の例では、 $0.334 < 0.5$  なので  $x$  の小数第 3 位はそのままにする。そして、 $x = 17.615 \pm 0.023$  という結果が得られる。

ここで、丸めは 1 桁ずつ行なってはいけない事に注意する。具体例として、 $2.346$  という数字を小数第 1 位まで丸める。通常の丸めでは  $2.346 \rightarrow 2.3$  となるが、小数第 3 位  $\rightarrow$  小数第 2 位という順で丸めていくと  $2.346 \rightarrow 2.35 \rightarrow 2.4$  となり異なる値が出る。

## 5 検出器の一般的な性質

導入として、装置の種類に共通な検出器の一般的な特徴を学ぶ。

原子核、素粒子物理は様々な検出器とともに発展してきた。すべての検出器に共通する基本原理は、放射線エネルギーの一部または全てを検出器の質量に移行し、より人間が認識しやすい形に変換するという事である。2 章で見たように、荷電粒子は原子内電子と直接衝突してエネルギーを移行するので、原子の励起や電離を誘発する。一方で、中性な放射線はまず、検出器の中で荷電粒子を発生させるある種の反応を起こし、次々に検出器の原子を電離、励起させる。変換されたエネルギーが現れる形は検出器とその設計に依存する。例えば、次の章で扱う気体検出器は、電離した電子を直接集めて電流信号を作る。一方、シンチレーターは励起と電離が分子を遷移させ、その分子が光を放出する。同様に、写真乳剤では電離による化学反応が軌跡を描く。

現代の検出器は電気的な装置である。すなわち、過程のどこかで検出器からの情報が電気信号に変換される。これはエレクトロニクスとコンピュータの発展の恩恵を受けており、現代の大部分の検出器を他の方法で開発することはできない。よって検出器を議論することはレクトロニクスを議論することとも言える。もちろん電氣的検出器が全てではないが、使用可能ならこういった検出器を使うほうが好ましい。以降の節では電氣的検出器関連についてのみ取り扱う。

### 5.1 感度

まずは感度について取り上げる。感度とは、一定の放射線のタイプやエネルギーに対し、使用可能な信号を生成する能力のことである。検出器は全てのエネルギーレンジで、全てのタイプの放射線を感知できるわけで



はない。代わりに、ある放射線タイプの一定なエネルギーレンジに対しては感度がいいように設計されている。この範囲の外では使用可能な信号を作れないか、もしくは能率が激減する。

検出器感度は検出器の以下の要素に依存する：

- 1) 電離の反応断面積
- 2) 質量 (たしと)
- 3) 固有のノイズ
- 4) 感知する部分を囲む保護用の物質

放射線のエネルギーの一部または全てを電離という形に変換する確率は、断面積と質量によって決まる。(ここに、検出器の性質として、引き起こされた電離が効率良く使用されることを仮定する。) 2章で見たように、荷電粒子は大きな電離性を持つので、低密度で体積が小さかろうと、ほとんどの検出器で電離が起きる。しかし、中性の粒子では電離はほとんど起きない。よって、まずは検出器の媒質を電離させるような、荷電粒子を発生させる相互作用が起きなければならない。普通、このような相互作用の断面積のほうがはるかに小さいので、適当な反応率を得るには、より大きな密度、体積が必要とされる。そうでなければ中性粒子は検出器を通過してしまうのである。例として、ニュートリノ検出器の質量はトンのオーダーが必要になる。

たとえ電離が起きたとしても、信号として使用するにはある最小量を超える必要がある。その下限は、検出器と関連電子によるノイズによって決定する。ノイズは出力電圧、電流を変動させ、放射線の有無に関わらず常に存在する。よって、ノイズの平均よりも大きな信号でなければならないことは明らかである。あるタイプ、あるエネルギーレンジの放射線に対し、それによって引き起こされる電離の総量は検出器の有感体積から算出される。

2つ目の制限要素は、有感体積を覆う窓の素材である。窓で吸収が起きるので、窓を通過できる十分なエネルギーを持った放射線のみが検出されてしまう。この素材の厚さは、検出したいエネルギーの下限から決定される。

## 5.2 検出器の応答

放射線の存在を検出するのに加え、多くの検出器はエネルギーの情報も得ることが出来る。何故なら、引き起こされた電離の量は有感体積内でのエネルギー損失に比例するからである。検出器が十分大きく、放射線を完全に吸収することが出来れば放射線のエネルギーが分かる。

一般的に、出力信号はパルスの形をしている。(注：一般的に、検出器は連続モードで動作しており、ある一定時間にやって来たパルスを積分して出力する。よって、放射線の強さによって電流、電圧が連続的に時間変化する。) 電離の総計は、この信号に含まれる電荷、即ちパルスの時間積分に反映されている。ただし、パルスの形はイベントごとに変化しないと仮定すると、積分値は信号の振幅やパルス高さに正比例する。そのため、電離の総計は、振幅やパルス高さを使ってを求めることもある。放射線のエネルギーと、電荷の積分やパルス高さとの関係を検出器の応答と呼ぶ。

理想として、この関係が線形であれば、測定したパルス高さからエネルギーへの変換がとても簡単になる。多くの検出器では、特定のレンジでは応答が線形に近似できるようになっているが、一般的には粒子のタイプとエネルギーの関数で記述する。よって、ある粒子に関して線形な検出器だからといって、他の粒子でもそうとは限らない。このいい例が有機シンチレーターである。後で見るように、電子での応答は非常に低いエネルギーまで線形だが、陽子、重陽子のような重い粒子に関しては非線形となっている。これは、粒子によって反応のメカニズムが異なるためである。

### 5.3 エネルギー分解能：ファノ因子

入射放射線のエネルギーを測るための検出器にとって、最も重要な要素がエネルギー分解能である。エネルギー分解能とは、隣合う2つのエネルギーを区別することできる限界の幅のことである。放射線の単色ビームを入射し、そのスペクトルを観測することで分解能は測定される。理想的にはデルタ関数的になるはずだが、実際には有限の幅をもったピークが観測され、通常ガウシアンを形をしている。電離、励起する数はゆらぐため、このように幅が現れる。

分解能は、通常ピークのFWHM(半値幅)で与えられる。この幅より近い距離のエネルギー同士は混同され、見分けることは出来ない。(図5.1はこのことを図示したもの。点線の2つのピークはFWHM以上の距離を持っているため、足しあわせた実践のグラフを見ても2つのピークが区別できる。)FWHMを $\Delta E$ で表すとして、エネルギー $E$ における相対的な分解能は、

$$\text{Resolution} = \Delta E/E. \quad (5.1)$$

これは、通常%で表す。例としては、NaIシンチレータは1MeVのガンマ線に対し約8 or 9%の分解能を持つ。一方、Ge検出器の分解能は0.1%のオーダーとなる。

一般的に、分解能は検出器に蓄積するエネルギーの関数である。(5.1)式は高エネルギーほど正確になるが、これは電離、励起がポアソンもしくはポアソンライクな分布をしているためである。実際、電離を起こすのに必要な平均エネルギーは、材質のみに依存する定数 $w$ である。つまり、蓄積エネルギー $E$ に対し、励起の平均数 $J = E/w$ であると考えられる。こうして、エネルギーの増加に伴い励起する数も増え、相対的なゆらぎは小さくなる。

ゆらぎを計算するには、2つの場合を考える必要がある。1つは放射線を完全には吸収できない場合。例えば、通過する粒子のエネルギー損失 $dE/dx$ だけが分かるような、薄く透過する検出器などである。信号を生じる反応の数はポアソン分布で与えられる。よって、分散は

$$\sigma^2 = J \quad (5.2)$$

となる。ここに、 $J$ はイベントの平均数。分解能のエネルギー依存性は次式で与えられる。

$$R = 2.35 \frac{\sqrt{J}}{J} = 2.35 \sqrt{\frac{w}{E}} \quad (5.3)$$

ファクター2.35はガウシアン標準偏差とFWHMを結ぶ係数である。このように、分解能はエネルギーのルートに反比例している。

もう1つ、放射線を完全に吸収できる場合について考える。この時、実験結果はポアソン分布から計算される分解能より小さくなっている。何故なら、前の場合と違い、今回は蓄積エネルギーが定数で与えられる。電離する数や電離によるエネルギー損失はこの値に制限されているため、電離は独立したイベントではなく、ポアソン分布が適用できない。ファノはこれを初めて計算し、次の値を得た。

$$\sigma^2 = FJ \quad (5.4)$$

ここに、 $J$ は平均電離数、 $F$ はファノ因子である。

$F$ は、検出器内でエネルギー移行を引き起こす様々な基本的プロセスの関数である。これは、フォノンの励起など、電離とは関係のないプロセスもすべて含む。理論的に、全てのプロセスを考慮して正確な $F$ を計算す

るのはかなり難しいが、結果として、関数は検出器の媒質固有の定数となる。(5.4) 式より、分解能は次式で与えられる。

$$R = 2.35 \frac{\sqrt{FJ}}{J} = 2.35 \sqrt{\frac{Fw}{E}} \quad (5.5)$$

$F = 1$  のとき、分散はポアソン分布と等しく、 $F < 1$  のとき、分解能は大きく向上する。これはシンチレータの場合だけではなく、半導体やガスの検知器でも多くの場合適用できる。

電離のゆらぎだけではなく、ノイズ、ドリフトといったエレクトロニクス関連の効果も含め、かなりの外的要因が分解能に影響を与える。これらの要因がそれぞれ独立なものと過程すればガウシアンで記述され、分解能の合計  $E$  は (4.64) 式で与えられる。即ち、

$$(\Delta E)^2 = (\Delta E_{\text{det}})^2 + (\Delta E_{\text{elect}})^2 + \dots \quad (5.6)$$

## 5.4 応答関数

エネルギースペクトルの測定において、考慮すべき重要な要素は検出される放射線についての検出器の応答関数である。これは与えられた放射線の単一エネルギービームに於て衝突される時に検出器から観測される波の高さのスペクトルに於てである。今まで反応スペクトルはガウシアンピークであると仮定してきたが、中性の放射線の場合にはいつも見られるわけではない。

検出器の応答関数は、検出器内での相互作用や検出器の設計や形状によって決定される。例として、電子が止まるぐらいの厚さの検出器を考えると電子はエネルギーを完全に失う前に検出器の外へ散乱され、低いエネルギー尾が見られる。同様に制動放射光子を放つ電子もある。これにより低エネルギーのイベントも起こす。応答関数はこのように散乱や制動放射によるエネルギー損失に於て決定されるエネルギー尾でガウシアンピークを構成する。応答関数は設計や形状を変えることでより良くなる。

放射線の種類で応答関数がどのように変わるか、ここではガンマ線を例にとってみる。ガンマ線は光電効果、コンプトン散乱、対生成を起こす。それによるすべての反応も考慮した全応答関数の様子が図5.2である。応答関数は、相対強度が相互作用の相対断面積で決定されるので、エネルギーや検出器が異なれば異なるものである。

もし検出器がガンマ線スペクトルを測定するために使われるなら観測された波高分布は

$$PH(E) = \int S(E') R(E, E') dE' \quad (5.7)$$

$R(E, E')$  : 入射エネルギー  $E'$  での応答関数

$S(E')$  : ガンマ線エネルギーのスペクトル

ここで、 $R(E, E') = \delta(E' - E)$  となっている。

## 5.5 応答時間

検出器のとても重要な特性の一つが応答時間である。これは放射線が到達後検出器が信号に変える時間のことである。

信号の継続時間も重要である。この時間の間次のイベントは起こらない。これは不感時間といって、5.7節で議論する。

## 5.6 検出器効率

絶対効率と内在性効率が検出器の効率として言及される。

絶対効率は

$$E_{\text{tot}} = \frac{\text{検出器に記録された数}}{\text{線源から放射された数}} \quad (5.8)$$

これは検出器の形状と検出器での相互作用の確率の関数である。

例として図 5.3 のようなものを考える。角度  $\theta$  で粒子が放射される確率は

$$P(\theta) d\Omega = \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (5.9)$$

(5.7) と (2.7) 式より

$$dE_{\text{tot}} = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right] \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (5.10)$$

$x$  : 検出器内での飛程距離

$\lambda$  : 平均自由行程

絶対効率は内在性効率  $E_{\text{int}}$  と幾何学的効率  $E_{\text{geom}}$  に分けられる。

$$E_{\text{tot}} \cong E_{\text{int}} E_{\text{geom}} \quad (5.11)$$

$$E_{\text{int}} = \frac{\text{記録された数}}{\text{検出器に衝突した数}} \quad (5.12)$$

内在性効率は放射線の種類, エネルギー, 検出器の物質の関数である。効率の問題は中性の粒子にとって重要となっている。なぜなら中性の粒子は荷電粒子を生成するために相互作用するから。

十分な質量が相互作用の適切な確率を供給するために存在しなければならないので検出器の次元が重要となる。

一方で、幾何学効率は、検出器と線源の幾何学的な配置に依る。図 5.3 のような検出器では  $E_{\text{geom}}$  は常に平均的な立体角の分数となるが、多検出器システムでは計算がいくらか複雑になる。

## 5.7 不感時間

不感時間とはイベントを経ることに検出器によって要求される制限時間である。これにより計数率に影響し、イベント到着間の時間分布がかわめられる。この影響をさけるために検出器の計数率は不感時間の間に起こるイベントの確率が小さいように十分低くなるようにしなければならない。

不感時間の影響を計算するとき全体の検出システムが考慮されなければならない。

不感時間に関して 2つのケースに区別できる。

1. extendable (non-paralyzable) dead time
  2. non-extendable (paralyzable) dead time
- これは図 5.4 を見れば分かりやすい。

2. のケースを考える。  $m$  が真の計数率として、検出器が時間  $T$  で  $k$  回記録すると仮定する。また不感時間を  $\tau$  とする。

$$mT = k + mk\tau \quad (5.13)$$

$$\Rightarrow m = \frac{k/T}{1 - k\tau} \quad (5.14)$$

1. のケースはより難しい。(4.60) の確率  $m$  で崩壊するイベント間の時間感隔の分布は

$$P(t) = m \exp(-mt) \quad (5.15)$$

$t > \tau$  のとき

$$-P(t \rightarrow \tau) = m \int_{\tau}^{\infty} \exp(-mt) dt = \exp(-m\tau) \quad (5.16)$$

これを

$$k = mT \exp(-m\tau) \quad (5.17)$$

図 5.5 は (5.17) のグラフとなっている。

上の式は一次近似式であり、より厳格な扱いは様々な方法でなされている。

ここで、1. と 2. とどちらが適しているのかを決定することが問題となってくる。多くの検出器は 1. と 2. の組み合わせでできている。そして不感時間は計数率、波形状などによって変化しうる。その解決

法は、システムの中に すべての他の物より 大きな不感時間の回路部品を加えれば、検査器システムを基礎的なモデルの1つとして扱うことができる。これはシステムをおろくするが、不感時間による不確かさを取りのぞく。