

EPR パラドックス について

吉池

(※参考: 現代量子物理学 上田正仁)

• EPR 相関 (アインシュタイン-ポッドolsky-ロゼン相関)

スピン 0 の粒子がスピン $\frac{1}{2}$ の 2 つの粒子 A, B に分裂する状態を考へる。
スピン角運動量の保存則による全系の状態は

$$|E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|↑\rangle_A |↓\rangle_B - |↓\rangle_A |↑\rangle_B) \quad (1)$$

空間的に A, B が離れていても、粒子の状態が測定されるまでは (1) のような状態であり、

$|E\rangle = |E_A\rangle |E_B\rangle$ のように書くことはできない。

→ エンタングルした状態

A の状態を測定した瞬間に離れた B の状態が決まる

空間的に離れた場所の相関を非局所相関または EPR 相関という

また (1) のような状態における粒子対を EPR ペア という

反論: 隠れた変数理論

(局所的な相互作用 存在する A, B への分裂した時点で状態は確定しており、
その後、何らかの確率的要素 (隠れた変数) により測定結果が確率的に変わった。)

反論の否定

$$|↑\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |↓\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad (\sigma_z |↑\rangle = |↑\rangle, \sigma_z |↓\rangle = -|↓\rangle)$$

これは測定軸を z 軸にとっていた

測定軸を x 軸にとると

$$|↑\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|↑\rangle + |↓\rangle)$$

$$|↓\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|↑\rangle - |↓\rangle) \quad (2) \quad (\sigma_x |↑\rangle = |↓\rangle, \sigma_x |↓\rangle = -|↑\rangle)$$

(2) より

$$|↑\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|↑\rangle + |↓\rangle), \quad |↓\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|↑\rangle - |↓\rangle) \quad (3)$$

(1) に代入すると

$$|E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|↑\rangle_A |↑\rangle_B - |↑\rangle_A |↓\rangle_B) \quad (4)$$

また、 $a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle = |\psi\rangle$ とすると、

$$c|\psi\rangle|\psi\rangle = (a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle)(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) \quad (17)$$

(6)(17)より矛盾が生じたため、複製は不可能であることがわかる □

* 状態が既知のとき
 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ においてそれぞれ C_1, C_2 と選ぶので複製は可能

よって相対論で要求される信号の伝わる速さは光速を超えないということ矛盾しない。
また、相対論では量子相関の存在は否定されていない。

ベルの不等式

アインシュタインの考え

アインシュタインの局所原理... 空間的に離れた粒子は、一方に与えられる行為が、他方の粒子に影響を与えない。
この原理に基づいて、どう遠隔作用を説明するか?
→ 隠れた変数理論

ベルの不等式

隠れた変数理論が満たすべき不等式

$$-2 \leq \langle QS + RS + RT - QT \rangle \leq 2 \quad (18)$$

(証明)

これまでと同様に EPR ペアを考え、A, B 地点それぞれで任意の 2 つの異なる方向のスピンを測定する

(Q, R ... A 地点で測定されたスピンの測定値
S, T ... B

また測定軸に対しスピンの向きは +1, 下向きの場合は -1 の測定値を与えるとする。

今、測定値の確率分布は局所的な相互作用 (EPR 分裂) と、この際による隠れた変数により決まり、観測行為の影響を受けない。 → 局所实在論

このとき、(Q, R, S, T) の組に対し、確率分布 $P(Q, R, S, T)$ が一意的に決まる。
ただし、隠れた変数があるため具体的な値は分からない。

$$\langle QS + RS + RT - QT \rangle = \sum_{Q,S,R,T=\pm 1} P(Q,S,R,T) (QS + RS + RT - QT) \quad (9)$$

と書ける。

$$QS + RS + RT - QT = Q(S-T) + R(S+T)$$

と書ける。 $S-T$ と $S+T$ の一方は必ず ± 1 、他方は必ず ∓ 1 である。

よって

$$QS + RS + RT - QT = \pm 2 \quad (10)$$

新たな確率分布は

$$\sum_{Q,S,R,T=\pm 1} P(Q,S,R,T) = 1 \quad (11)$$

よって (10), (11) より (9) は

$$-2 \leq \langle QS + RS + RT - QT \rangle \leq 2 \quad \text{と書ける} \quad \square$$

$\langle QS + RS + RT - QT \rangle$ の量子力学的計算

測定軸方向の単位ベクトルをそれぞれ q, r, s, t とする

$$\hat{Q} = q \cdot \hat{\sigma}^A, \hat{R} = r \cdot \hat{\sigma}^A, \hat{S} = s \cdot \hat{\sigma}^B, \hat{T} = t \cdot \hat{\sigma}^B \quad (\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)) \quad (12)$$

$$\hat{Q} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{T} - \hat{Q} \otimes \hat{T} = \sum_{i,j=1,2,3} [q_i (s_j - t_j) + r_i (s_j + t_j)] \hat{\sigma}_i^A \hat{\sigma}_j^B$$

$$\text{E} [(\hat{Q} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{T} - \hat{Q} \otimes \hat{T})^2]$$

$$= \sum_{i,j,k,l} [q_i (s_j - t_j) + r_i (s_j + t_j)] [q_k (s_l - t_l) + r_k (s_l + t_l)] (\hat{\sigma}_i^A \hat{\sigma}_k^A) (\hat{\sigma}_j^B \hat{\sigma}_l^B) \quad (13)$$

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{j,k} \hat{I} + i \epsilon_{jkl} \hat{\sigma}_l \quad (14)$$

$$\text{E} [(\hat{\sigma}_i^A \hat{\sigma}_k^A) (\hat{\sigma}_j^B \hat{\sigma}_l^B)] = \delta_{i,k} \delta_{j,l} \hat{I}^A \otimes \hat{I}^B + i \delta_{i,k} \epsilon_{jlm} \hat{I}^A \otimes \hat{\sigma}_m^B + i \delta_{j,l} \epsilon_{ikn} \hat{\sigma}_n^A \otimes \hat{I}^B - \epsilon_{ikn} \epsilon_{jlm} \hat{\sigma}_n^A \hat{\sigma}_m^B \quad (15)$$

(15) E (13) について計算

$$\text{第1項} = \sum_{i,j} [q_i (s_j - t_j) + r_i (s_j + t_j)]^2 \hat{I}^A \otimes \hat{I}^B$$

$$= 4 \hat{I}^A \otimes \hat{I}^B$$

$$\text{第2項} = \sum_{i,j,k,l} [q_i (s_j - t_j) + r_i (s_j + t_j)] [q_k (s_l - t_l) + r_k (s_l + t_l)] \underbrace{\epsilon_{jlm} \hat{I}^A \otimes \hat{\sigma}_m^B}_{\text{対称性}} = 0$$

$j \leftrightarrow l$ 対称性

$j \leftrightarrow l$ 反対称性

同様に(第3項) = 0

$$\text{(第4項)} = - \sum_{i,j,k,l} \left[\underbrace{g_i g_k (s_j - t_j)}_{\text{対称}} + \underbrace{t_i t_k (s_j + t_j)}_{\text{対称}} + 2 g_i t_k (s_j - t_j) (s_k + t_k) \right] \varepsilon_{ikn} \varepsilon_{jlm} \hat{\sigma}_n^A \otimes \hat{\sigma}_m^B$$

$$= -2 \sum_{i,j,k,l} g_i t_k \left(\underbrace{s_j s_k}_{\text{対称}} + 2 \underbrace{s_j t_k}_{j \leftrightarrow l, k} - \underbrace{t_j t_k}_{\text{対称}} \right) \varepsilon_{ikn} \varepsilon_{jlm} \hat{\sigma}_n^A \otimes \hat{\sigma}_m^B$$

$$= -4 \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_{ikn} g_i t_k \hat{\sigma}_n^A \otimes \varepsilon_{jlm} s_j t_l \hat{\sigma}_m^B$$

$$= -4 \left[(\hat{S} \times \hat{I}) \cdot \hat{\sigma}^A \right] \otimes \left[(\hat{S} \times \hat{I}) \cdot \hat{\sigma}^B \right]$$

$$\text{よって } (\hat{Q} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{I} - \hat{Q} \otimes \hat{I})^2 = 4 \hat{I}^A \otimes \hat{I}^B - 4 \left[(\hat{S} \times \hat{I}) \cdot \hat{\sigma}^A \right] \otimes \left[(\hat{S} \times \hat{I}) \cdot \hat{\sigma}^B \right] \quad (16)$$

任意の演算子に対し、 $\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \geq 0$ となる。

$$\left| \langle \hat{Q} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{I} - \hat{Q} \otimes \hat{I} \rangle \right| \leq \sqrt{\langle \hat{I}^A \otimes \hat{I}^B - \left[(\hat{S} \times \hat{I}) \cdot \hat{\sigma}^A \right] \otimes \left[(\hat{S} \times \hat{I}) \cdot \hat{\sigma}^B \right] \rangle} \quad (17)$$

$$\text{特に } \langle \hat{I}^A \otimes \hat{I}^B \rangle = 1$$

$$\text{ハネリ行列の固有値は } | \text{以下} \leq \text{以上} = \pm \sqrt{\dots} \quad -1 \leq \left[(\hat{S} \times \hat{I}) \cdot \hat{\sigma}^A \right] \cdot \left[(\hat{S} \times \hat{I}) \cdot \hat{\sigma}^B \right] \leq 1 \quad (18)$$

(18)を(17)に代入すると、

$$\left| \langle \hat{Q} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{I} - \hat{Q} \otimes \hat{I} \rangle \right| \leq 2\sqrt{2} \quad (19)$$

上記の不等式が成り立っている。すなわち、隠れた変数理論が否定された結果に到る。

実際、

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{とすれば}$$

$$\langle \hat{Q} \otimes \hat{S} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle \hat{\sigma}_2^A \otimes \hat{\sigma}_2^B + \hat{\sigma}_2^A \otimes \hat{\sigma}_2^B \rangle$$

$$\text{これは(11)(4)から計算でき、} \langle \hat{Q} \otimes \hat{S} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{と成る}$$

$\langle \hat{R} \otimes \hat{S} \rangle$ なども同様に計算でき、

$$\langle \hat{Q} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{S} + \hat{R} \otimes \hat{I} - \hat{Q} \otimes \hat{I} \rangle = 2\sqrt{2} \quad \text{が得られる。}$$

物理的実在の要素

アインシュタインは、ある根拠に基づいて、物理を考えていた。

「力学系を記述する物理量が測定できると、その物理量に付随する

物理的実在の要素が存在する

(古典的力学変数は実在の要素)

EPRペアでは、Aの粒子のスピンを測定すると、Bの粒子のスピンは測定するこ
となく（検出器が壊れを知らせた）わかる。

つまり、Bの粒子のスピンは物理的実在の要素であるということになる。
しかし、Bの粒子のスピンは今まで見たように上向きも下向きも有りうる。量子力学は全てが
確率で表されており、物理的実在の要素は存在しないからである。
この矛盾がベルの不等式の破れを引き起こし、パラドックスの根源となっている。

これを判、ホーアは、AとBを別の力学系と考えることはできず、Aの測定操作は系全体
に対するBの粒子にも影響を及ぼすとして、このパラドックスを説明した。

• 非局所相関の確見測例

2準位原子

原子の2つの準位 E_m, E_n を選ぶ $\hbar\omega = E_n - E_m$ とするレーザーを用意する。
このレーザー光による励起は $E_m \rightarrow E_n$ だけを考えれば良いとみなせるので、
 m, n の2準位で記述されると近似できる。

上準位にある状態を $|u\rangle$ 、下準位にある状態を $|d\rangle$ とする。

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar\omega \hat{\sigma}_z \quad (\text{エネルギーは } E_u \text{ と } E_d \text{ の中間を } 0 \text{ とした}) \quad (21)$$

昇降演算子 $\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$

光子ハミルトニアンは \hat{a}, \hat{a}^\dagger を消滅・生成演算子と見ると

$$\hat{H}_F = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (23) \quad (\text{ゼロ点振動は無視})$$

原子と光子の相互作用は

$$\begin{cases} \text{光子を1個吸収して } |d\rangle \rightarrow |u\rangle & \dots \hat{\sigma}_+ \hat{a} \\ \text{光子を放出して } |u\rangle \rightarrow |d\rangle & \dots \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \end{cases} \quad (\text{光子以外の無視})$$

$$\hat{H}_I = \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \quad (24)$$

(21), (23), (24) の全ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{JC} = \frac{1}{2}\hbar\omega \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \quad (25)$$

(ジャインズ-カミングス・ハミルトニアン)

\hat{H}_{JC} のエネルギー固有値、固有状態を求める

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u, n\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |d, n+1\rangle \quad (26)$$

$$E_{\pm} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \hbar g \sqrt{n+1} \quad (27)$$

次に状態の時間発展を見る

初期状態を $|\psi(0)\rangle = |u, n\rangle$ とする

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_{JC} |\psi(t)\rangle \quad (28)$$

$$\text{よ} \quad |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{JC} t} |\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{JC} t} |u, n\rangle \quad (29)$$

(26), (27) より

$$|u, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\pm\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\mp\rangle$$

$$\hat{H}_{JC} |\pm\rangle = E_{\pm} |\pm\rangle, \quad \hat{H}_{JC} |\mp\rangle = E_{\mp} |\mp\rangle \quad (30)$$

(30) と (29) に代入すると

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{+} t} |\pm\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{-} t} |\mp\rangle \quad (31)$$

(26) を代入すると

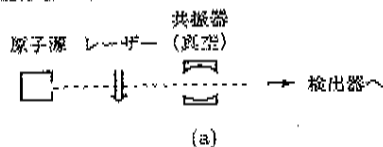
$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} E_{+} t} + e^{-\frac{i}{\hbar} E_{-} t} \right) |u, n\rangle + \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} E_{+} t} - e^{-\frac{i}{\hbar} E_{-} t} \right) |d, n+1\rangle \quad (32)$$

(27) より

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) t} \left[\cos(g\sqrt{n+1}t) |u, n\rangle - i \sin(g\sqrt{n+1}t) |d, n+1\rangle \right] \quad (33)$$

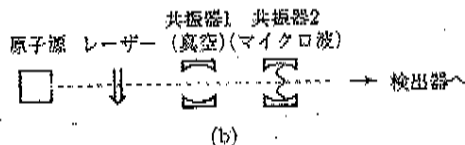
以上準位と下準位が周期的に現れることがわかった (ラビ振動)

実験



・レーザー光を照射して、原子の初期状態を $|u, 0\rangle$ とする

・共振器(真空)で光子を分離する



・検出器で原子のエネルギー準位を測定する

• (a) の場合

(33) 列 状態の時間発展がわかった

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} (\cos g t |u, 0\rangle - i \sin g t |d, 1\rangle) \quad (34)$$

測定結果は

$$\begin{cases} \text{上準位} \rightarrow \text{共振器中の光子の数 } 0 & (|u, 0\rangle) \\ \text{下準位} \rightarrow \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 & (|d, 1\rangle) \end{cases}$$

古典的エネルギー保存則が成り立つ。

• (b) の場合

$t = t'$ のときに共振器 2 に χ の振幅を新たに起こさせる。

$$|u\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} \omega (t-t')} (\cos [g(t-t')] |u\rangle - i \sin [g(t-t')] |d\rangle)$$

$$|d\rangle \rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} \omega (t-t')} (-i \sin [g(t-t')] |u\rangle + \cos [g(t-t')] |d\rangle) \quad (35)$$

(\because (28) ~ (33) の初期条件を $|u\rangle \rightarrow |d\rangle$ にすればよい)

よって

$$|\Psi(t)\rangle = \cos g t |u\rangle |0\rangle - i \sin g t |d\rangle |1\rangle$$

$$\rightarrow \cos g t (\cos [g(t-t')] |u\rangle - i \sin [g(t-t')] |d\rangle) |0\rangle$$

$$- i \sin g t (-i \sin [g(t-t')] |u\rangle + \cos [g(t-t')] |d\rangle) |1\rangle$$

$$= \{ \cos g t \cos [g(t-t')] |0\rangle - \sin g t \sin [g(t-t')] |1\rangle \} |u\rangle$$

$$- i \{ \cos g t \sin [g(t-t')] |0\rangle + \sin g t \cos [g(t-t')] |1\rangle \} |d\rangle \quad (36)$$

(36) の光子場の状態は検出器 1 の中の状態であるため変化せず。

測定された原子の準位が再び振動している。

測定結果

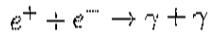
$$\begin{cases} \text{上準位} \rightarrow \cos g t \cos [g(t-t')] |0\rangle - \sin g t \sin [g(t-t')] |1\rangle \\ \text{下準位} \rightarrow \cos g t \sin [g(t-t')] |0\rangle + \sin g t \cos [g(t-t')] |1\rangle \end{cases}$$

(a), (b) の結果の違い \Rightarrow 非局所相関の正当性

1 理論

1.1 EPRパラドックス

角運動量 0 の光子対の偏光を 2 地点で観測するモデルを考える。
まずこの光子対はパラポジトロニウムによって生成される。パラポジトロニウムは 1S_0 の状態で内部パリティの積はマイナス。



量子数の保存によってこの反応でできた 2 光子の系の波動関数は

$$|F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1\rangle|R_2\rangle - |L_1\rangle|L_2\rangle)$$

ただし R は右偏光、L は左偏光を表す。(具体的はレポート参照)
この系で次のように考える

1. 測定位置 α で R(L) を測定すると β は必ず R(L) と予測できる。よって β は R また L。
2. α で何を測定しても β での光の性質は変わらない (Einstein の局所性の原理)。したがって β は R また L。つまり β では 1/2 確率で x 偏光 また y 偏光。
3. α で x(y) 偏光だと測定すると β では必ず y(x) 偏光だと予測できる。
4. 2 では α で何を測定しても何か情報が伝わって β での光の性質が変わることはなく x,y 偏光の確率 1/2 なのに、3 では α での測定で β での光の性質が変わって偏光が決定される。これは矛盾。

これが EPR パラドックスである。これはあくまで局所性を仮定した場合であるが、もし隠れた変数が存在し偏光を測定したときの結果がパラポジトロニウムが対消滅した時ですでに決定論的に決まっているなら、局所性を仮定しても妥当である。隠れた変数理論ならすべてをうまく説明できるといえる。

一方量子力学では 2 光子の偏光は観測するまで 2 つの状態の重ね合わせで一方の光子の偏光を観測した瞬間、他方の光子の偏光が決まる。

1.2 bell の不等式

2 つの linear polariser α, β を用意する。この α, β は光子がある方向 Φ に偏光していれば +1、その垂直方向に偏光に -1 を出力。 α を ϕ_i 方向 β を ϕ_j 方向に置き、多数回測定する ($i, j = 1, 2, 3, 4$)。そして $\alpha_i \beta_j$ の期待値を計算する。隠れた変数理論の場合では事象 $i(\alpha_i$ と β_j の相関) の起こる確率はすべてあらかじめ決まっています、このとき

$$|\overline{\alpha_1 \beta_2} + \overline{\alpha_4 \beta_3}| + |\overline{\alpha_1 \beta_3} - \overline{\alpha_4 \beta_2}| \leq 2$$

これが bell の不等式 (具体計算はレポート参照)。

一方量子力学では、2 光子状態は

$$|F\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle|y_2\rangle + |y_1\rangle|x_2\rangle)$$

α 方向を x 軸と一致させると β の偏光方向となす角度は ϕ

1. α が x 偏光のとき ($\alpha = +1$)

光子 1 について $|x_1\rangle$

光子 2 について $|y_2\rangle = |x_1\rangle \sin \phi + |y_1\rangle \cos \phi$

の状態である。したがって

$$(\alpha = +1, \beta = +1 \text{ の確率}) = \frac{1}{2} \sin^2 \phi$$

$$(\alpha = +1, \beta = -1 \text{ の確率}) = \frac{1}{2} \cos^2 \phi$$

2. α が y 偏光のとき ($\alpha = -1$) も同様

$$(\alpha = -1, \beta = +1 \text{ の確率}) = \frac{1}{2} \cos^2 \phi$$

$$(\alpha = -1, \beta = -1 \text{ の確率}) = \frac{1}{2} \sin^2 \phi$$

よって

$$\overline{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (+\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) + \frac{1}{2} (-\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = -\cos 2\phi$$

ここで $\phi_1 = 0, \phi_2 = \frac{3\pi}{8}, \phi_3 = \frac{\pi}{8}, \phi_4 = \frac{\pi}{4}$ と選ぶと

$$|\overline{\alpha_4\beta_2} + \overline{\alpha_4\beta_3}| + |\overline{\alpha_1\beta_2} - \overline{\alpha_1\beta_3}| = 2\sqrt{2} \geq 2$$

となり bell の不等式は破られる。

もし隠れた変数理論における偏光の相関を $\overline{\alpha\beta} = -k \cos 2\phi$ と仮定すると、bell の不等式に代入することで

$$f_{max} = 2\sqrt{2} \leq \frac{2}{|k|}$$

よって $|k| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。これが隠れた変数理論における相関の上限である。

2 実験

compton 散乱を用いて偏光を測定することで k 値を測定する。 γ 線が散乱体で compton 散乱され検出器で検出される (図 2.1)。微分断面積は klein-nishina の式により 散乱面と偏光のなす角度を η として

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right) (\zeta - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \eta)$$

(記号の意味はレポート 9 ページ)。

偏光と散乱面が平行と垂直の場合は $\eta=0$ 度, 90 度を Klein-Nishina の式に代入することで微分断面面積が出て、Klein-Nishina の式を η で 0 から 2π まで積分した全散乱断面面積で割ったのが、散乱面と偏光が水平また垂直で検出される確率となる。

検出器 1 の場合

$$\pi_{1\parallel\epsilon_1} \text{の確率} = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\zeta_1 - 2\sin^2\theta_1}{2(\zeta_1 - \sin^2\theta_1)}$$

$$\pi_{1\perp\epsilon_1} \text{の確率} = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\zeta_1}{2(\zeta_1 - \sin^2\theta_1)}$$

(へーじ 10)。

$\pi_{1\parallel\epsilon_1}$ の時,

$$\alpha = +1, \alpha\beta = -k \cos 2\phi$$

なので $\beta = -k \cos 2\phi$ 。この時検出器 2 に入った光子が平行また垂直で検出される確率を a, b とおくと

$$a = \frac{1 - k \cos \phi}{2}$$

$$b = \frac{1 + k \cos \phi}{2}$$

$\pi_{1\parallel\epsilon_1}$ の時に検出器 1, 2 で同時に光子を観測する確率は

$$\frac{\zeta_1 - 2\sin^2\theta_1}{2(\zeta_1 - \sin^2\theta_1)} \left[\frac{1 - k \cos 2\phi}{2} \frac{\zeta_2 - 2\sin^2\theta_2}{2(\zeta_2 - \sin^2\theta_2)} + \frac{1 + k \cos 2\phi}{2} \frac{\zeta_2}{2(\zeta_2 - \sin^2\theta_2)} \right]$$

(検出器 1 に θ_1 で入る確率) \times (二つの検出器が ϕ をなすときに検出器 2 で偏光と散乱面が平行に検出される確率) \times (検出器 2 に θ_2 で入る確率)

同様に $\pi_{1\perp\epsilon_1}$ の時検出器 1, 2 で同時に光子を観測する確率は

$$\frac{\zeta_1}{2(\zeta_1 - \sin^2\theta_1)} \left[\frac{1 + k \cos 2\phi}{2} \frac{\zeta_2 - 2\sin^2\theta_2}{2(\zeta_2 - \sin^2\theta_2)} + \frac{1 - k \cos 2\phi}{2} \frac{\zeta_2}{2(\zeta_2 - \sin^2\theta_2)} \right]$$

以上を足し合わせると検出器 1, 2 で同時に γ 線が検出される相対確率は

$$R = 1 - k \left(\frac{\sin^2\theta_1}{\zeta_1 - \sin^2\theta_1} \right) \left(\frac{\sin^2\theta_2}{\zeta_2 - \sin^2\theta_2} \right) \cos 2\phi$$

$$\zeta_j = \frac{1}{2 - \cos^2\theta_j} + 2 - \cos^2\theta_j \quad (j = 1, 2)$$

(ページ 11) 2つの検出器が同時に γ 線を検出するカウント数を $f(\phi)$ とすると $f(\phi)$ は R に比例するので

$$f(\phi) = 1 - k \left(\frac{\sin^2\theta_1}{\zeta_1 - \sin^2\theta_1} \right) \left(\frac{\sin^2\theta_2}{\zeta_2 - \sin^2\theta_2} \right) \cos 2\phi$$

よって $f(\phi)$ をフィットすることで k が求められ隠れた変数理論と量子力学のどちらが正しいかを決定できる。

3 実験装置 (図 2.3)

上下に出た γ 線をまずプラスチックシンチレータに通し、compton 散乱した γ 線をさらに NaI シンチレータに通し 4 つのシンチレータが同時に γ 線を検出した場合のみカウントする。カウントする光子は光電子倍增管で増幅して見やすくする。この特定を 2 つの NaI シンチレータのなす角 ϕ を 0 度から 180 度まで 45 度刻みで測る。
線源から NaI シンチレータに直接 γ 線が入るのを防ぐために鉛遮蔽をおく。(ページ 12) γ 線の物質中での減衰は leoP53~参照。
また対消滅による β^+ 線を防ぐ必要があり、 β^+ 線を遮蔽するために上部をアルミ、下部を鉄で覆う。 β^+ 線線の物質中での減衰 leoP37~参照。

実験回路は

- 光電子倍增管を見やすくするために電圧を最大にする。
- プラスチックシンチレータでは threshold を高く設定しノイズを消す。
- amplifier で光電子倍增管の信号を増幅
- 4 つのシンチレータで coincidence(同時計数)をとって gate generator1 に送る
- 信号を一つ一つ数えるために gate generator1 は来た信号をいったん gate generator2 の VETO(拒否権とかそんな意味)に入力する。VETOに通すと入力時は同時に大量の信号が来ても、出力時には一つ一つにわかれて出ていく。
- gate generator2 の width が小さすぎて信号を検出しそこなうことがないように width を最大にする。

4 解析 simulation

キャリブレーションを行う。線源は ^{22}Na [511KeV,1275KeV], ^{60}Co [1173KeV,1333KeV], ^{137}Cs [662KeV] を使用。線源の γ 線をシンチレータに照射して、実験前と実験あとでシンチレータの値に異常はないかを確認。次に有効カウント数を決定する。シンチレータの光電ピークをガウシアンでフィット。ピークの平均値 $\pm\sigma$ に入る範囲を有効カウントとする。そして有効カウント数の ϕ 依存性をグラフにフィットして k を出すことができる(ページ 20, 21 参照) 実際の実験は器材の大きさなどが影響するが、simulation を行うことで理論と比較できる。

simulation はモンテカルロ法を使う。モンテカルロ法は数式を立てて解析的に解くのではなく、十分多数回の実験結果を集めて求めようとする解や法則を統計的に求める方法である。偏りをなくするために乱数を使う。

例 円周率をモンテカルロ法で計算する場合

一辺 $2L$ の正方形とそれに接する半径 L の円を考える。適当に点を打ったときその点が円内に入る確率は

$$\frac{L^2\pi}{4L^2} = \frac{\pi}{4}$$

適当に打つ点を増やせば増やすほど 円周率が正確に求まる。

EPR 実験の場合まず (1) 2γ 線の位置と速度方向を特定し、(2) プラスチックシンチレータで 0 回や 3 回以上の compton 散乱を破棄、(3) NaI シンチレータで光電効果や compton 散乱を起こさないものを破棄、(4) 検出されるプラスチックシンチレータでの compton 散乱によるエネルギーや NaI シンチレータでのエネルギーをファイルする。この時 compton 散乱の位置と散乱方向で乱数振る。

simulation の仮定

- プラスチックシンチレータでの 2 回目の compton 散乱や NaI シンチレータでの compton 散乱は偏光依存がなく、散乱角 ϕ は同じ
- シンチレータの減衰長は 1KeV 毎に変わる。
- NaI シンチレータで検出されるエネルギーは光電効果の場合は光子のエネルギー、compton 散乱の場合は散乱された電子のエネルギーとする。

simulation 結果は P25 表 4.2.

simulation の結果を用いて χ^2 を求める。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(N_i^E - N_i^S)^2}{\sigma_{N_i^E}^2 + \sigma_{N_i^S}^2}$$

パラメータはレポート P25 参照。量子力学の場合 $\chi^2/ndf = 0.874$ (上側累積確率 0.48)。隠れた変数理論では $\chi^2/ndf = 31.38$ (上側累積確率 3.5×10^{-26})。よって量子力学と実験結果と有意な差はなく、一方隠れた変数理論ではほぼ 100 パーセントの確率で棄却される。

5 理論とのずれ

実験結果と理論とのずれを考える。その一つはシンチレータの大きさによるもので、散乱点が散乱中心からずれた場合、立体角の違いに比例してカウント数がずれる。(ページ 28) 補正の仕方は ~p37。

また線源の位置のずれから生じる非対称性も考え得、実験のセットアップの状態で下側のプラスチックシンチレータと NaI シンチレータの二つのみ coincidence をとって各 ϕ についての NaI シンチレータのカウントを計測することで見積もることができる。

1 対消滅による2対消滅放射の偏光相関

singletにある電子陽電子対は角運動量の保存やパリティ保存により、対消滅時生成する2 γ 線の偏光は垂直でなければならない。

図1 検証実験では線源は ^{64}Cu を使う。 ^{64}Cu の β^+ 崩壊により対消滅放射を発生させる。 ^{64}Cu はサイクロトロンによる ^{65}Cu への重陽子照射により生成する。

線源の周りは検出器方向以外は鉛で覆い遮蔽。検出器はアルミを使い散乱させガイガーカウンターでカウントする。coincidenceは方位角 ϕ で0、90、180、270度で計測。非対称性を除くために検出器両方を順番に回転させて計測する。

その結果平均散乱角はわずかに90度より小さく、理論的最大値82度に近い。カウンターの立体角を考慮すると90度において $\frac{C_{\perp}}{C_{\parallel}} \approx 1.7$ が期待される。実際の4回の測定はいずれも $C_{\perp} \geq C_{\parallel}$ であった。

平均すると

$$\frac{C_{\perp}}{C_{\parallel}} = 1.9_3 \pm 0.3_7$$

誤差は分散の範囲内。したがって実験によって理論は正しいと証明される。

2 対消滅放射の散乱による角相関

上の実験は誤差は大きく理論と詳しく比較することができない。よってhannaは実験をアレンジしてより誤差の少なくした。

検出器はガイガーカウンタに代わりにシンチレータを使うことで能率を10倍、カウント率を100倍増やすことができる。RCA5819光電子倍增管とアセチレン結晶を使うことで、対消滅放射発生率は7~8パーセントとなり計算値とよく合う。

^{64}Cu を直径8 長さ8 のアルミのカプセルでパックし、その周りは6 \times 6 \times 6インチ厚さ3/8インチの鉛で遮蔽。鉛の中のトンネルは放射ビームの角度分散が3度以下に抑えるようにあける。直径1/2インチ厚さ1インチのアルミ結晶の散乱物は対消滅放射の40パーセントを吸収するように、90度においてmultiplescatterを15パーセント以下に制限するように設計される。この条件下ではシンチレーションによって検出された散乱光は、アルミニウム結晶の散乱物のあるなしでノイズに3倍の差があった。

検出する際は一つの検出器を固定してもう一つの検出器を0、90、180、270度で計測。反対の検出器で同様な操作をもう一度。トータル計測時間は連続で30時間で統計偏差はガイガーカウンターよりはるかに進歩した。結果を平均すると

$$\frac{C_{\perp}}{C_{\parallel}} = 2.04 \pm 0.08$$