

4.3 黄金律

ここでは反応率がどう与えられるかを見る。

まず、反応率は遷移の原因となる相互作用ポテンシャルの種類と強さに依存し、始状態の波動関数を ψ_i 、終状態の波動関数を ψ_f とすると遷移行列要素は

$$M_{fi} = \langle \psi_f | \hat{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \hat{H}_{\text{int}} \psi_i dV \quad (4.15)$$

で与えられ、これは遷移の確率振幅とも呼ばれる。

また、反応率はいくつの終状態がその反応に対して開かれているかに依存する。ここで、不確定性原理

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

より、それぞれの粒子の状態が運動量と位置の6次元位相空間に占める体積は $\hbar^3 = (2\pi\hbar)^3$ を占めている。よって、体積 V 及び p' と $p' + dp'$ の間の運動量領域に散乱された粒子の状態の数は

$$dn(p') = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{(2\pi\hbar)^3} dp' \quad (4.16)$$

非相対論で考えると粒子のエネルギーと運動量は

$$dE' = v' dp' \quad (4.17)$$

よって状態密度は

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{v' \cdot (2\pi\hbar)^3} \quad (4.18)$$

ここで、フェルミの第2黄金律 (Appendix 参照) より、標的粒子当たり、入射ビーム粒子当たりの反応率 W は

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \cdot \rho(E') \quad (4.19)$$

となる。一方、式 (4.3),(4.4) より

$$W = \frac{\dot{N}(E)}{N_b \cdot N_a} = \frac{\sigma \cdot v_a}{V} \quad (4.20)$$

ここで $V = N_a / n_a$ はビーム粒子が存在する空間の体積。(4.19),(4.20) より断面積と遷移行列要素は

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar \cdot v_a} |M_{fi}|^2 \cdot \rho(E') \cdot V \quad (4.21)$$

の関係で結ばれる。

黄金律はスペクトロスコピーの過程にも成り立つ。これらの場合、寿命を τ とすると、粒子数が $N = N_0 e^{-t/\tau}$ であるとすると

$$W = -\frac{\frac{dN}{dt}}{N} = \frac{1}{\tau} \quad (4.22)$$

4.4 ファインマン・ダイアグラム

ここでは、ファインマン・ダイアグラムにより表わされた電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用の過程をみる。図4.5に例としてダイアグラムが示されている。時間軸は下から上へ、空間軸は左から右へ向いているものと約束する。ダイアグラム中の直線は入ってくるフェルミ粒子ないし反応後でしていくフェルミ粒子の波動関数を示す。反粒子は時間軸と逆向きの矢印によって示されている。光子は波線、重いベクトルボソンは点線、グルーオンは螺旋により表わされる。

図4.5(a)は電子と陽電子の弾性衝突を表わしていて電子が光子を放出し陽電子がそれを受け取ることで相互作用する。ここで光子のように始状態にも終状態にも表れない粒子を仮想粒子と呼ぶ。不確定性原理により仮想粒子についてはエネルギー運動量関係式 $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ を満たさなくてもよい。これは、交換される粒子の質量は自由な粒子（実粒子）の質量とは異なる、すなわちエネルギー保存則が短時間の間破れていると解釈することが出来る。3つないしそれ以上の粒子の線が集まっている点を頂点と呼び、それぞれの頂点は遷移行列要素の1つの項に対応しており、相互作用の構造と強さを含んでいる。それぞれの頂点で光子は電子、陽子の電荷に結合しており遷移振幅はともに微細構造定数 α を使って $\sqrt{\alpha}$ に比例した因子を含んでいる。

図4.5(b)は電子-陽電子対の消滅を表わし、(c)は同じ過程の少し複雑な場合を示している。この過程にはもっと複雑なダイアグラムも寄与する。それらを高次のダイアグラムと呼ぶ。遷移行列要素には同じ終状態に達する全てのダイアグラムによる振幅の重ね合わせが含まれるが、 $\alpha \ll 1$ なのでダイアグラム(c)やさらに高次のダイアグラムは(b)にわずかな補正を与えるだけなので電子-陽子対の消滅の断面積は、良い近似でダイアグラム(b)で与えられる。

図4.5(d)は中性の重いベクトルボソン Z^0 による弱い相互作用で電子-陽電子の対消滅に続いてミューオン対が生成されるのを示している。図4.5(e)は中性子の β 崩壊を示し、図4.5(f)は2つのクォーク q と q' がグルーオンを交換することによって生じる強い相互作用を示している。

弱い相互作用における重いベクトルボソンは弱電荷に結合し、強い相互作用ではグルーオンがクォークの色電荷に結合しており、それ故 $M_{fi} \propto \alpha_w, M_{fi} \propto \alpha_s$ となる。

交換された粒子は遷移行列要素に伝播関数項として寄与し、この項は一般に

$$\frac{1}{Q^2 + M^2 c^2} \quad (4.23)$$

と書ける。ここで Q^2 は相互作用により移行する4元運動量の自乗であり、Mは交換される粒子の質量である。従って、交換される粒子の質量の違いから電磁相互作用と弱い相互作用の断面積は大きく異なるが、運動量移行が高い領域では同じくらいになる。

第5章 原子核の幾何学的な形

原子核の大きさや形を決定する方法には、原理的には例えば陽子や α 粒子の散乱実験があるが、陽子や α 粒子の持つ拡がりや、入射粒子と標的の間に働く核力がまだよく理解されていないことから、このような実験から詳細な情報を得るのは難しい。

小さな物体を研究するには電子散乱が特に適している。その理由としては、電子が我々の知っている限りでは内部構造を持たない点状の粒子であり、原子核、核子ないしクォークと電子の間の相互作用はよくわかっている電磁相互作用であり、微細構造定数 $\alpha \sim 1/137 \ll 1$ なので高次の補正がわずかな役割しか果たさないことによる。

5.1 電子散乱の運動学

電子による散乱実験では極めて相対論的な粒子を扱るので、運動学的な計算においては4元ベクトルを用いるのがよい。4次元の時空ベクトルと4次元の運動量ベクトルはそれぞれ

$$\begin{aligned}x &= (ct, \mathbf{x}) \\p &= (E/c, \mathbf{p})\end{aligned}\tag{5.1}$$

となる。ここで4元ベクトル $a = (a_0, \mathbf{a}), b = (b_0, \mathbf{b})$ のスカラー積は

$$a \cdot b = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\tag{5.2}$$

で定義されローレンツ不変である。特に4元運動量の自乗もローレンツ不変である。

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2\tag{5.3}$$

これは静止質量 m の自乗に c^2 をかけたものに等しい。なぜなら、適当なローレンツ変換を行うことにより、 $\mathbf{p} = 0, E = mc^2$ と出来るからである。

$$m = \sqrt{p^2}/c\tag{5.4}$$

を不变質量と呼ぶ。(5.3) と (5.4) より、

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4\tag{5.5}$$

よって、

$$E \gg mc^2 \text{ ならば } E \approx |\mathbf{p}|c \quad (5.6)$$

電子の場合は数 MeV でもこの近似が成り立つ。ここで、4 次元運動量 p の電子が 4 次元運動量 P の粒子により散乱される場合を考える（図 5.1）。エネルギーと運動量の保存則より

$$\mathbf{p} + \mathbf{P} = \mathbf{p}' + \mathbf{P}' \quad (5.7)$$

自乗して

$$p^2 + 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{P} + P^2 = p'^2 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{P}' + P'^2 \quad (5.8)$$

弾性散乱の場合には衝突前後での入射粒子と標的の不变質量 m_e, M は変わらないので

$$p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2, P^2 = P'^2 = M^2 c^2 \quad (5.9)$$

よって

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}' \quad (5.10)$$

また、

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{P} - \mathbf{p}') = \mathbf{p}'\mathbf{p} + \mathbf{p}'\mathbf{P} - m_e^2 c^2 \quad (5.11)$$

$$\mathbf{p} = (E/c, \mathbf{p}), \mathbf{p}' = (E'/c, \mathbf{p}'), \mathbf{P} = (Mc, 0), \mathbf{P}' = (E'_P/c, \mathbf{P}') \quad (5.12)$$

よって

$$E \cdot Mc^2 = E'E - \mathbf{p}\mathbf{p}'c^2 + E'Mc^2 - m_e^2 c^4 \quad (5.13)$$

高エネルギーにおいては $m_e c^4$ を無視し (5.6) より

$$E' = \frac{E}{1 + E/Mc^2 \cdot (1 - \cos\theta)} \quad (5.15)$$

ここで θ は \mathbf{p} と \mathbf{p}' のなす角度であり散乱角と呼ばれる。また、 $E' - E$ は標的に移行する反跳エネルギーである。

Appendix : フェルミの第2黄金律

Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = \hat{H} |\Phi(t)\rangle \quad (1)$$

において Hamiltonian \hat{H} を

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} \quad (2)$$

とする。ここで $\hat{H}_0, \hat{H}_{\text{int}}$ は時間に依存せず、対角化されており、 \hat{H}_{int} の効果は \hat{H}_0 に比べて十分小さいとする。また、 \hat{H}_0 の固有値 E_n に対応する固有関数を $|\psi_n\rangle$ とする。また、 $|\psi_n\rangle (n=1, 2, \dots)$ が正規直交完全系をなすものとすると

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) \exp\left(\frac{E_n}{i\hbar}t\right) |\psi_n\rangle \quad (3)$$

と書ける。ここで、 $\hat{H}_{\text{int}} = 0$ のときには、(1) より $c_n(t)$ は定数となる。

ここで、

$$|\Phi(t)\rangle_I = \sum_n c_n(t) |\psi_n\rangle \quad (4)$$

$$|\Phi(t)\rangle = \exp\left(\frac{\hat{H}_0}{i\hbar}t\right) |\Phi(t)\rangle_I \quad (5)$$

とすると、(5) を (1) に代入し

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle_I = \hat{V}_I(t) |\Phi(t)\rangle_I \quad (6)$$

ここで

$$\hat{V}_I(t) = \exp\left(-\frac{\hat{H}_0}{i\hbar}t\right) \hat{H}_{\text{int}} \exp\left(\frac{\hat{H}_0}{i\hbar}t\right) \quad (7)$$

とした。(6) の両辺を t について 0 から t まで積分し、

$$|\Phi(t)\rangle_I = |\Phi(0)\rangle_I + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{V}_I(t') |\Phi(t')\rangle_I \quad (8)$$

この式の右辺第2項の $|\Phi(t')\rangle_I$ にこの式の t を t' で置き換えたものを代入すると

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle_I &= |\Phi(0)\rangle_I + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{V}_I(t') |\Phi(0)\rangle_I \\ &\quad + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' \hat{V}_I(t') \int_0^{t'} dt'' \hat{V}_I(t'') |\Phi(t'')\rangle_I \end{aligned} \quad (9)$$

ここで $\hat{V}_I(t)$ は十分小さいと考えているので、右辺の第3項を無視して、

$$|\Psi(t)\rangle_I \sim |\Phi(0)\rangle_I + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{V}_I(t') |\Phi(0)\rangle_I \quad (10)$$

ここで、 $|\Phi(0)\rangle_I = |\psi_i\rangle$ とし、(10) に左から $\langle\psi_f| (f \neq i)$ を作用させると (4) と $|\psi_n\rangle (n = 1, 2, \dots)$ の正規直交性より

$$c_f(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle\psi_f| \hat{V}_I(t') |\psi_i\rangle \quad (11)$$

(7) より

$$\begin{aligned} c_f(t) &= \frac{1}{i\hbar} \langle\psi_f| \hat{H}_{\text{int}} |\psi_i\rangle \int_0^t dt' \exp\left(\frac{E_i - E_f}{i\hbar} t'\right) \\ &= \frac{\left\{ \exp\left(i\frac{E_f - E_i}{\hbar} t\right) - 1 \right\}}{E_i - E_f} \langle\psi_f| \hat{H}_{\text{int}} |\psi_i\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

よって時刻 t において、系の状態が $|\psi_f\rangle$ に遷移している確率は

$$\begin{aligned} |c_f(t)|^2 &= \left\{ \frac{2 \sin \frac{(E_f - E_i)t}{2\hbar}}{E_f - E_i} \right\}^2 |\langle\psi_f| \hat{H}_{\text{int}} |\psi_i\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \left\{ \frac{\sin \frac{(E_f - E_i)t}{2\hbar}}{(E_f - E_i)/2\hbar} \right\}^2 |\langle\psi_f| \hat{H}_{\text{int}} |\psi_i\rangle|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで t を十分大きいとしてみて

$$|c_f(t)|^2 \sim t \cdot \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |\langle\psi_f| \hat{H}_{\text{int}} |\psi_i\rangle|^2 \quad (14)$$

よって、単位時間あたりの遷移確率 $W_{i \rightarrow f}$ は終状態の状態密度 $\varrho(E_f)$ を用いて

$$\begin{aligned} W_{i \rightarrow f} &= \int \frac{|c_f(t)|^2}{t} \varrho(E_f) dE_f \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle\psi_f| \hat{H}_{\text{int}} |\psi_i\rangle|^2 \cdot \varrho(E_i) \end{aligned} \quad (15)$$