

第17章 原子核の構造

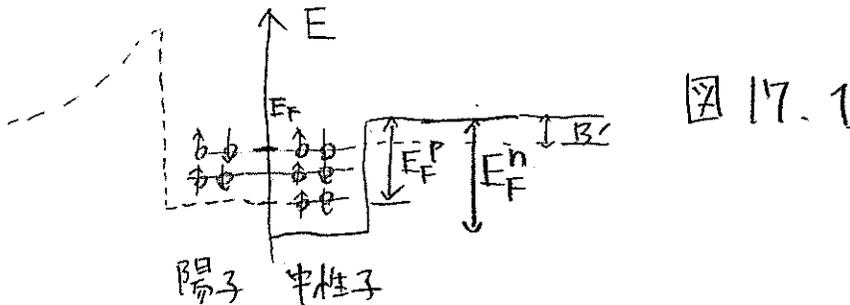
原子核の基底状態やわずかに励起した状態は縮退したフェルミ気体としてとらえることができる。この描像が可能なのは核子間の結合が「弱い」ためであり、それによって核子のフェルミ運動を理解することができる。

核子の自由粒子としての運動を仮定することで、 Λ 粒子による核子のエネルギー準位の研究が可能になる。

またフェルミ気体モデルを改良した殻モデルは魔法数や原子核の変形をよく説明できる。

17.1 フェルミ気体モデル

原子核を陽子・中性子という2種類のフェルミ粒子が原子核の体積全体を自由に動いているものとみなす。核子が感じるポテンシャルを箱型と仮定すると以下のようになる。



体積 V 、運動量幅 dp の中に1つの核子がとることができる可能な状態の数は

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \cdot V \quad (17.1)$$

$T=0$ で原子核が基底状態にあるときフェルミ運動量 p_F まで核子がつまっているのこのときの状態の数は(17.1)より

$$n = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4}{3} p_F^3 = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad (17.2)$$

スピンの自由度 (\uparrow, \downarrow) も考えると状態の数は

$$N = \frac{V (p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad \text{および} \quad Z = \frac{V (p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (17.3)$$

ここで p_F^n, p_F^p はそれぞれ中性子・陽子のフェルミ運動量、
原子核の体積に

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 A \quad (17.4)$$

を代入し測定値 $R_0 = 1.21 \text{ fm}$ を使い
陽子と中性子のポテンシャルが同じ半径であると仮定すると
 $Z = N = \frac{A}{2}$ の原子核ではフェルミ運動量が

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 250 \text{ MeV}/c \quad (17.5)$$

となる。これは核子が原子核中で大きな運動量を持って
自由に動いていることを表している。

この p_F は重い原子核での測定値とよく一致しているのが
重い原子核ではフェルミ気体模型がよいモデルになっている
ということがわかる。

核子のフェルミエネルギーは質量 M を用いて

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33 \text{ MeV} \quad (17.6)$$

箱型ポテンシャルの上端とフェルミレベルの差 B' は
核子あたりの結合エネルギー $B/A = 17-8 \text{ MeV}$ に等しい。
ここからポテンシャルの深さ V_0 は

$$V_0 = E_F + B' \approx 40 \text{ MeV} \quad (17.7)$$

フェルミエネルギーと V_0 もほぼ A によらず一定である。

金属中の自由電子気体との対照から、原子核中の核子気体が比較的ゆるく束縛された系であることがわかる。

安定した原子核であれば陽子と中性子のフェルミレベルがそろっていないかぎりではないが、重い原子核では中性子のほうが陽子より数が多いということが知られている。これは陽子間のクーロン斥力によって陽子のポテンシャルが浅くなっているものとして理解できる。この効果は

$$V_C = (Z-1) \frac{\alpha \cdot \hbar c}{R} \left(= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Z-1)e^2}{R} \right) \quad (17.8)$$

と書ける。

中性子過剰核 ($Z < N$) の結合エネルギーをフェルミ気体モデルから評価する。核子あたりの平均運動エネルギーは

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_{kin} p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M} \approx 20 \text{ MeV} \quad (17.9)$$

したがって原子核全体の運動エネルギーの総和は

$$E_{kin}(N, Z) = N(E_n) + Z(E_p) = \frac{3}{10M} (N \cdot (p_F^n)^2 + Z \cdot (p_F^p)^2) \quad (17.10)$$

==に $Z \neq N$ があることに注意して (17.3), (17.4) を代入して

$$E_{kin}(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^3} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} \quad (17.11)$$

	$E_{kin}(N, Z)$	結合エネルギー
$N = Z$	最小	大きい
$N \neq Z$	大きい	小さい

さらに $N-Z$ が小さいとして (17.11) を展開すると以下の式を得る

$$E_{\text{kin}}(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \left(A + \frac{5}{9} \frac{(N-Z)^2}{A} + \dots \right) \quad (17.12)$$

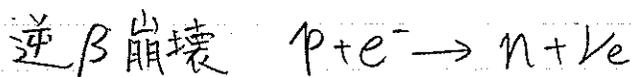
第1項は体積項、第2項は非対称エネルギー。

$$M(A, Z) = (\text{構成粒子の質量}) - \underbrace{a_v A}_{\text{体積項}} + \underbrace{a_s A^{\frac{2}{3}}}_{\text{表面項}} + \underbrace{a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{2}}}}_{\text{クーロン項}} + \underbrace{a_a \frac{(N-Z)^2}{4A}}_{\text{非対称項}} + \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}} \quad (2.8)$$

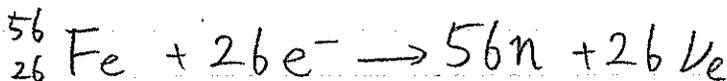
$N \neq Z$ の場合のポテンシャルの変化を考慮する必要はあるが (2.8) の体積項と非対称項の根拠が説明できる。

☐ 中性子星への応用

中性子星は超新星爆発の際、星が重力崩壊して生成される。重力によって密度が高くなると電子密度も高くなる。そのため電子のフェルミエネルギーが増加し



のモードで陽子が中性子に変わる反応が起こる。こうしてクーロン障壁のない巨大な核物質に変わっていく。



やがて中性子の密度が 10^{18} kg/m^3 になると中性子のフェルミ圧力が重力崩壊とつりあって爆縮が止まる。

以上のようにして生成された中性子星の大きさを、中性子星が一定密度の冷たい中性子気体、いわゆる巨大な原子核として扱えるという仮定のもとで計算する。

質量 $M = 3 \times 10^{30} \text{ kg} \Leftrightarrow$ 中性子数 $N = 1.8 \times 10^{57}$
 とするとフェルミ運動量と中性子あたりの運動エネルギーは

$$P_F = \left(\frac{9\pi N}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{R} \quad (17.13)$$

$$\langle E_{\text{kin}}/N \rangle = \frac{3}{5} \frac{P_F^2}{2M_n} = \frac{C}{R^2} \quad \text{但し } C = \frac{3\hbar^2}{10M_n} \left(\frac{9\pi N}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (17.14)$$

一方で中性子星の重力エネルギーは

$$\langle E_{\text{pot}}/N \rangle = -\frac{3}{5} \frac{GNM_n^2}{R} \quad (17.15)$$

と書ける。ここで M_n は中性子の質量。
 星が平衡状態にあるという条件から

$$\frac{d}{dR} \langle E/N \rangle = \frac{d}{dR} [\langle E_{\text{kin}}/N \rangle + \langle E_{\text{pot}}/N \rangle] = 0 \quad (17.16)$$

その結果

$$R = \frac{\hbar^2 (9\pi/4)^{\frac{2}{3}}}{GM_n^3 N^{\frac{1}{2}}} \quad (17.17)$$

ここに数値を代入することで $R \approx 12 \text{ km}$ とわかる。
 これは観測値にたいへん近いが実際の中性子星は
 一様ではないのでより厳密な計算が必要である

現実ではフェルミ圧力と短距離の核子-核子
 斥力によって重力とつりあっている。

また中性子星の中心の高密度領域では
 クォークが閉じ込められておらずクォーク物質の相が
 あるかもしれない。

17.2 ハイパー核

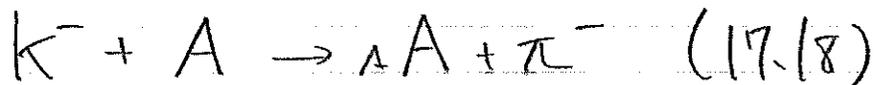
フェルミ気体模型が威力を発揮するのは主として角運動量の量子化が無視できるような大きな系(中性星等)であるが原子核はそうではない。

離散的な角運動量 $l=0, 1, 2, \dots$ で指定されるエネルギー準位にフまった核子は相互作用によってその位置を交換するが、その様子は観察することはできない。よって核子のエネルギー準位を研究するには工夫が必要である。

その方法として原子核中にプロブとしてストレンジネスを持ったハイポイロンを入れるというものがある。ハイポイロンを含む原子核をハイパー核という。

強い相互作用のもとではストレンジネスが保存するので Λ 粒子は強い相互作用による崩壊に対して安定である。

ハイパー核を作る効率的な方法は



である。この添字は以下のような反応によって原子核中の中性子が Λ に変換したことを表す。



散乱された核子への運動量移行は小さい方が望ましいので $\theta=0^\circ$ のパイ中間子を観測するのがよいが実際は K^- の γ の運動量を $300-1000 \text{ MeV}/c$ にすることで運動量移行 \ll フェルミ運動量として、原子核は台し太なものとみなす。

エネルギーの保存を考えると Λ 粒子の結合エネルギー B_Λ と π^- のエネルギー E_π は既知のパラメータで以下のように関係づけられる。

$$B_{\Delta} = B_n + E_{\pi} - E_k + (M_{\Delta} - M_n)c^2 + \text{原子核の反跳エネルギー} \quad (17.20)$$

^{12}C についてパイ中間子のスペクトルを B_{Δ} の関数で描くと 図 17.3 のようになる。

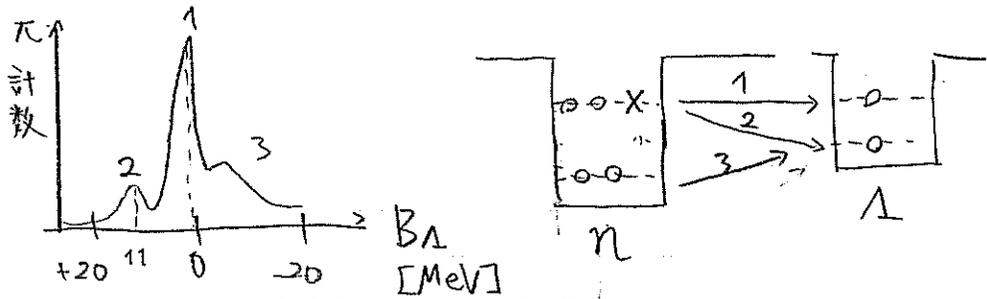


図 17.3

1. 高いエネルギー状態の n が Δ になったが、同じエネルギー準位にとどまりパイ中間子にエネルギーを与えない。
2. 高いエネルギー状態の n が Δ になって Δ のエネルギー準位のうちより低いものに遷移し、パイ中間子にエネルギーを与える。
3. 深く束縛された n が Δ になって、 Δ のエネルギー準位に遷移し、パイ中間子からエネルギーをもらう。

3 は Δ 粒子の感じるポテンシャルが核子-核子間のポテンシャルに比べて浅いことに由来する。

1, 2 のピークはそれぞれ Δ の $1p$ 状態、 $1s$ 状態に対応していて、その差は 11 MeV 。

Δ の 1 粒子状態はより重い原子核での



のような反応でよりはっきり観測される。

このようにして s, p, d, f 軌道ごとの Δ のエネルギー準位を測定し、それを理論と比較すると一致する。

箱型ポテンシャルの中で Δ 粒子は自由粒子として動く。

17.3 殻模型

ハイパー核から得た ハイパイロンが原子核中で離散的なエネルギー準位を持つ。この事実を核子にも拡張すると、平均場中の核子は原子核の作るクーロンポテンシャル中の電子とのアナロジーで理解できると推測される。

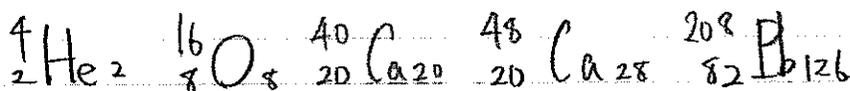
魔法数

原子中の電子のエネルギー準位は互いに隔た、たまごまりをなす。これを殻構造という。

核子のエネルギー準位にも殻構造が現れると、考えてモデル(殻模型)を作ると魔法数をよく説明できる。

魔法数: 陽子・あるいは中性子を特定の数 (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126) だけ持った原子核には安定なものが非常に多いことから、その数を魔法数と呼ぶ。

特に電子と中性子がどちらも魔法数の 2重魔法数の原子核は非常に安定である。



四 原子核ポテンシャルの固有状態

一般に球対称のポテンシャルの下で粒子の波動関数は $R_{nl}(r)$ と $Y_l^m(\theta, \varphi)$ に分解できて

$$\begin{cases} n = 1, 2, 3, 4, \dots & (\text{1-ドの数} + 1) \\ l = s, p, d, f, g, h, \dots & (\text{軌道角運動量}) \end{cases}$$

という量子数をもつ。スピン自由度も考えると n, l 準位は $2 \cdot (2l+1)$ 重に縮退していて $l=0$ のときは $(-1)^l$ である。

強い相互作用の到達距離は短いのでポテンシャルを3次元の調和振動子とみなすとエネルギーは

$$E_{\text{調和振動}} = (N + \frac{3}{2}) \hbar \omega = (N_x + N_y + N_z + \frac{3}{2}) \hbar \omega \quad (17.22)$$

ここで N と n, l に以下の関係にある

$$N = 2(n-1) + l \quad (17.23)$$

四 ウッズーサクソンポテンシャル

重い原子核の密度分布がフェルミ分布で記述できることからそれに対するポテンシャルも

$$V_{\text{center}}(r) = \frac{-V}{1 + e^{(r-a)/a}} \quad (17.24)$$

のようなウッズーサクソンポテンシャルになる。この下では N についての縮退は解けて n, l でエネルギーが決まる。これにより最初の3つの魔法数 (2, 8, 20) が理解できる

しかしもっと大きい魔法数は未だ説明することができない。さらに補正が必要。

④ スピン-軌道結合

ポテンシャルに $l \cdot s$ 項を付け加えると

$$V(r) = V_{\text{center}}(r) + V_{es}(r) \frac{l \cdot s}{\hbar^2} \quad (17.25)$$

核子の軌道角運動 l とスピン s の合成角運動量は $j = l \pm s$ となるので期待値は

$$\frac{\langle l \cdot s \rangle}{\hbar^2} = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2} = \begin{cases} \frac{l}{2} & (j=l+\frac{1}{2}) \\ -\frac{l+1}{2} & (j=l-\frac{1}{2}) \end{cases} \quad (17.26)$$

したがってエネルギー分離 ΔE_{es} は

$$\Delta E_{es} = \frac{2l+1}{2} \langle V_{es}(r) \rangle \quad (17.27)$$

と書けて l が増えると線型に増加する。
また実験から $\langle V_{es}(r) \rangle$ は負である。

こうして作られるエネルギーギャップで
28 以降の魔法数を説明することができる。

低いエネルギーでは $N=0, N=1, N=2$ の殻が
魔法数 2, 8, 20 に対応する。しかし 1f 殻での
スピン-軌道結合による効果はとて大きいので
1f $\frac{7}{2}$ とその上の準位にギャップができて
魔法数 28 が生じる。

これは原子核のスピン軌道相互作用の
著しい特徴で、原子の $l \cdot s$ 結合は微細構造分離
($\sim \alpha^2$) を起こすにすぎない。

④ 1粒子-1空孔状態

殻模型の成功は魔法数の説明にだけとどまらず、魔法数±1の陽子・中性子数の原子核の性質も殻模型でよく説明できる。

特に質量数15~17までの原子核について例示する。

${}_{7}^{15}\text{N}_8$ と ${}_{8}^{15}\text{O}_7$ は陽子数 ↔ 中性子の入れ替えの関係 (鏡映核) になっていて、励起準位のスペクトル、スピン、パリティが似ている。
→ 核力のアイソスピン独立性

${}_{8}^{16}\text{O}_8$ は2重魔法数。

${}_{8}^{17}\text{O}_9$ と ${}_{9}^{17}\text{F}_8$ も鏡映核でスペクトルが似ている。しかし質量数15・16の原子核と比べて第1励起エネルギーが小さい。

⇒ 1. $p_{1/2}$ 殻と $1d_{5/2}$ 殻のエネルギーギャップ (15・16)

↓
1 $d_{5/2}$ 殻と 2 $s_{1/2}$ 殻のエネルギーギャップ (17)

殻模型では閉殻の核子は原子核全体のスピンとパリティに影響せず、それ以外の核子 (バレンス核子) によってスピン・パリティ・励起エネルギーが決まる。

またバレンス核子とのアナロジーで $A=15$ の原子核は ${}_{8}^{16}\text{O}_8$ から欠けている1つの核子 (空孔) によって物理量が決まる、といえる。

四殻模型における磁気モーメント

原子核の磁気(双極子)モーメントは
核子のスピンと軌道角運動量から

$$\mu_{\text{原子核}} = \mu_N \cdot \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^A \{ \ell_i g_\ell + s_i g_s \} \quad (17.28)$$

$$g_\ell = \begin{cases} 1 & (\text{陽子}) \\ 0 & (\text{中性子}) \end{cases} \quad (17.29)$$

$$g_s = \begin{cases} +5.58 & (\text{陽子}) \\ -3.83 & (\text{中性子}) \end{cases} \quad (17.30)$$

となる。

閉殻 + 1粒子 (1空孔) 状態のもとの

$$\mu_{\text{原子核}} = \frac{1}{\hbar} \langle \psi_{\text{原子核}} | g_\ell \mathbf{L} + g_s \mathbf{S} | \psi_{\text{原子核}} \rangle \cdot \mu_N \quad (17.31)$$

Wigner-Eckart の定理より) 原子核のスピンを J とし

$$\mu_{\text{原子核}} = g_{\text{原子核}} \cdot \mu_N \cdot \frac{\langle J \rangle}{\hbar} \quad (17.32)$$

$$g_{\text{原子核}} = \frac{\langle JM_J | g_\ell \mathbf{L} + g_s \mathbf{S} | JM_J \rangle}{\langle JM_J | J^2 | JM_J \rangle} \quad (17.33)$$

1粒子状態のときは $J = j + \frac{1}{2}$ ので以下の式が成り立つ。

$$2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = j^2 + \ell^2 - s^2, \quad 2\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = j^2 + s^2 - \ell^2 \quad (17.34)$$

これにより

$$g_{\text{原子核}} = \frac{g_\ell \{ j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1) \} - g_s \{ j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1) \}}{2j(j+1)} \quad (17.35)$$

原子核のスピン向きが量子化軸に最大限にそろったとき $|M_J| = J$ のときの測定値を磁気モーメントと定義すると

$$\frac{|\mu_{\text{原子核}}|}{\mu_N} = g_{\text{原子核}} J = \left(g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2I + 1} \right) \quad \text{ただし } J = j = l \pm \frac{1}{2} \quad (17.36)$$

となる。

この結果は $A=15, 17$ では実験値とかなり近い。

17.4 変形核

魔法数と離れた核子数ではポテンシャルつまり原子核の形状が球対称ではない。これは原子核に電気四重極モーメントがあるということを示唆している。

四重極モーメント

電気二重極モーメント、電気八重極モーメントなど奇数次のモーメントはパリティ保存のためゼロなので四重極モーメントを考える。

四重極モーメントの古典的な定義は以下。

$$Q = \int (3z^2 - r^2) \rho(x) d^3x \quad (17.37)$$

$\rho(x)$ が一定の回転楕円体 (z 軸方向の半径 a 、 x, y 軸方向の半径 b) とは

$$Q = \frac{2}{5} Ze (a^2 - b^2) \quad (17.38)$$

球対称からのずれを小さいとして
平均半径 $\langle R \rangle = \left(\frac{ab^2}{3} \right)^{1/3}$ と半径の差 $\Delta R = a - b$
を用いて変形の大きさを変形パラメータ

$$\delta = \frac{dR}{\langle R \rangle} \quad (17.39)$$

で表せば

$$Q = \frac{4}{5} Z e \langle R \rangle^2 \delta \quad (17.40)$$

となる。異なる質量数の原子核とも変形の大きさを比較できるように以下のようにして
 楕円4重極モーメントを定義する

$$Q_{楕円} = \frac{Q}{Ze \langle R \rangle^2} \quad (17.41)$$

$Q_{楕円}$ は魔法数の周辺では小さく離れると大きい。
 特に $Q > 0$ ($a > b$) のとき原子核は扁長 (プロレート)
 $Q < 0$ ($a < b$) のとき原子核は扁平 (オブレート)
 とよぶ。

4重極モーメントは最外殻の占められていない
 準位のみ起因すると考えると大きくなるので
 原子核全体が扁極化していると考えられる。

4 対エネルギーと偏極エネルギー

原子物理ではフントの規則から
 まず各軌道に1つずつ電子が入り次に同じ
 軌道にスピン逆向きの電子が入る。
 これはクーロ、斥力のためである。
 しかし核子間では引力のため全く逆の現象が
 起こる。

- 核子が対にならば全角運動量を0にするとき
 原子核は安定になる
 (つまり $l_1 = l_2$, $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = 0$ のような状態)
 そのような対は $J^{\pi} = 0^+$

- 核子の対は隣軌道 (m が隣) を順次占めていく傾向がある。
二核によって原子核の大きな変形が起る。

上記のような性質のために原子核の角運動量とパリティは対を成していない核子によって決まる。

四核子の1粒子運動

変形核ではポテンシャルも回転楕円型になっている。(→ニルソン模型)

補足 多重極展開

静電場の Poisson eq.

$$\Delta \phi(x) = -\frac{1}{\epsilon} \rho_e(x)$$

の特解は

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_e(x')}{|r-x'|} d^3x'$$

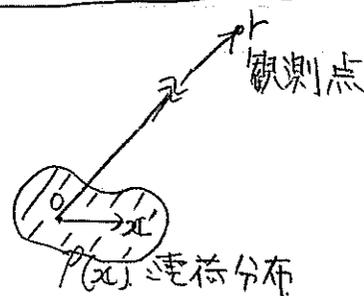
$$r = |r|, x = |x| \text{ と } z$$

$$\frac{1}{|r-x'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+x'^2-2rx'\cos\theta}}$$

=これを $r > a > x'$ のときとして $\left(\frac{x'}{r}\right)$ のべきで展開すると

$$\frac{1}{|r-x'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{x'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta')$$

となる $P_l(x)$ は Legendre の多項式で



$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

一般に $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell$ である

直交関数系となる。

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'}$$

こうして展開された $\phi(r)$ について ℓ 番目のものを
電荷 2 重極子による静電ポテンシャルと見做す。

(10) 変換 $(r \rightarrow -r)$ により $\theta \rightarrow \pi - \theta$ となるので
 $\cos \theta \rightarrow \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ であるから $P_\ell(\cos \theta) \rightarrow (-1)^\ell P_\ell(\cos \theta)$
と変換する。

$$\phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad \phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot n}{r^2}, \quad \phi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \frac{Q}{r^3}, \dots$$

但し

$$q = \int_V \rho(x') d^3x', \quad p = \int_V x' \rho(x') d^3x'$$

$$Q = \int_V [(n \cdot x')(n \cdot x') - \frac{1}{3} x'^2] \rho(x') d^3x'$$

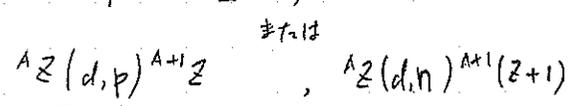
多重極展開 Q の期待値は

$$\int \psi^* Q \psi dr$$

これは $|\psi|^2$ のパリティは正だから Q のパリティが
正でないとき全空間での積分は 0 になる(走)
→ 最低次は 4 重極子 E-マルチ

17.5 原子核反応によるスピン反転
核力による相互作用による原子核反応

○ストリッピング反応



(例: 17.11)

反応断面積は (5.22) より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{k} |M_{fi}|^2 \frac{p^2 dp V^2}{(2\pi\hbar)^3 v_0 dE} \quad (17.42)$$

v_0 : 入射重陽子の速度
P.E.: 終状態の運動量エネルギー (反跳は無視)

$$M_{fi} = \langle \psi_f | U_{n,p} | \psi_i \rangle \quad (17.43)$$

↑
ストリッピング反応を起す相互作用

ホルン近似 (相互作用が弱いまたは有効近似)

入射粒子と出ていく粒子の波動関数は、平面波で記述する。

$$\psi_i = \phi_A \phi_0 \exp(i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_0 / \hbar) = \phi_A \phi_0(x_n - x_p) \exp(i\mathbf{p}_0 \cdot \frac{x_n + x_p}{2\hbar}) \quad (17.44)$$

ϕ_A : 標的原子核の基底状態の内部構造
 ϕ_0 : 重陽子の内部構造

$$\psi_f = \phi_{A+1} \exp(i\mathbf{p}_p \cdot \mathbf{r}_p / \hbar) \quad (17.45)$$

この反応では原子核の構造は変わらず、原子核 A に中性子が 1 つだけ加わると近似すると

$$\phi_{A+1} = \phi_A \psi_n(x_n) \quad (17.46)$$

ψ_n : 原子核 A のポテンシャルによる中性子の波動関数を核モデルで計算したものを

この反応を短距離相互作用として

$$U_{n,p} = U_0 \delta^3(x_p - x_n) \quad (17.47)$$

とすると

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | U_{n,p} | \psi_i \rangle &= \int d^3x_n d^3x_p \psi_f^* U_0 \delta^3(x_p - x_n) \psi_i = (|\phi_A|^2 = 1) \\ &= U_0 \phi_0(x_n=0) \int d^3x \psi_n^*(x) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} / \hbar) \end{aligned} \quad (17.48)$$

$Q = p_0 - p_p$: 原子核に移行した運動量

つまり、微分断面積は ψ_n のフーリエ積分の自乗に比例している。
重陽子から原子核へと中性子を移行せよ相互作用が陽子の運動に影響を与えない
という仮定が成り立つのは、重陽子の運動エネルギーが 20 MeV 程度以上のとき

(\rightarrow 重陽子の結合エネルギー $\sim 2.225 \text{ MeV}$)

このとき、中性子をとり去るにも陽子は同じ軌道で運動する。

角運動量

移行した中性子の角運動量が大きいとき、

$$l \sim |Q| R \quad \leftarrow \text{原子核の半径}$$

二ホムにより、 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ のピークから l を求めることができる。

$^{16}\text{O}(d,p)^{17}\text{O}$ 反応

図 17.12, $\theta = 45^\circ$ で測定された陽子のスペクトル

各ピークが 図 17.7 の ^{17}O の状態に対応。

陽子のエネルギーが小さければ、その分エネルギーが移行が大きくなるので、高い励起状態になる。

図 17.13, 各状態に対応する陽子の角度分布。

$E_{\alpha} = 0.87 \text{ MeV}$... 中性子は $2s_{1/2}$ 殻に入るので $l=0$, これは $\theta=0^\circ$ 付近で $|f_l|=0$ のピーク

$E_{\alpha} = 0 \text{ MeV}, 5.08 \text{ MeV}$... 中性子は $1d_{5/2}, 1d_{3/2}$ 殻に入るので $l=2$, $\theta=0^\circ$ でない $\theta=31^\circ$ のピーク

ポールの近傍の限界 - DWBA (歪曲波ボルン近似)

平面波近似の代わりに、粒子の軌道が曲がることや、原子核への吸収も考慮した波動関数を用いる。図 17.13 より、小さな運動量移行領域では実験結果とよく一致する。

① ピーク $A, 7^\circ$ 反応

$$^A_Z(p,d)^{A-1}_Z, \quad ^A_Z(n,d)^{A-1}_{(Z-1)}, \quad ^A_Z(d,^3\text{He})^{A-1}_{(Z-1)}, \quad ^A_Z(d,^3\text{H})^{A-1}_Z \quad \text{など}$$

(例, 図 17.14)

ストリッピンがある場合と同様に考えられ、(17.48) で $\psi_n \rightarrow \psi_n^{-1}$ (空孔状態) とすれば良い

$^{16}\text{O}(d,^3\text{He})^{15}\text{N}$ 反応

図 17.15, $\theta=11^\circ$ で測定された ^3He のスペクトル

2つの大きなピークは $1p_{1/2}^{-1}, 1p_{3/2}^{-1}$ に対応している (図 17.7)

運動量移行が大きくなる場合、反応が複雑になり計算結果と合わなくなる。 (図 17.16)

以上のよう=崩壊の近傍ではバレンス核子またはバレンス空孔の励起で原子核の状態を考えたことができたが、殻が半ばで埋められているような原子核では、励起状態は多くの殻モデル状態の混合として考えなければならぬ。

17.6 原子核のβ崩壊

[15.5節 - 自由な中性子のβ崩壊]

β崩壊が原子核中で起る場合の影響

- ・行列要素で始状態と終状態の原子核の波動関数は重なりを含む。
- ・崩壊前後の原子核の結合エネルギーの差
- ・放出された e^- (e^+) が η - ρ 相互作用を受けた

位相空間

(15.46) の $f(E_0)$ は e^- (e^+) と終状態の原子核 Z' の間の η - ρ 相互作用による位相空間が変化する。

$$f(E_0) \rightarrow f(Z', E_0) = \int_0^{E_0} \xi_e \sqrt{\xi_e^2 - 1} (E_0 - \xi_e)^2 F(Z', E_0) d\xi_e \quad (17.50)$$

$F(Z', E_0)$: Z' は ρ 数、 η - ρ 相互作用による補正で計算可能
非相対論的近似として。

$$F(Z', E_0) \approx \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \quad \beta^\pm \rightarrow \eta = \mp \frac{Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar v_e} = \mp \frac{Z'\alpha}{v_e/c} \quad (17.49)$$

図 17.17 β^\pm 崩壊で放出された e^\pm のエネルギースペクトル。
崩壊率のエネルギー依存性は (15.45) に従う

f_t 値 ... 半減期 $t_{1/2}$ と $f(Z', E_0)$ の積

(15.47)、 $t_{1/2} = \ln 2 \cdot \rho$ より

$$f_t = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \ln 2 \frac{1}{V^2} \frac{1}{|M_{fi}|^2} \quad (17.51)$$

行列要素

行列要素のベクトル部分と軸性ベクトル部分の比は、原子核の終状態、始状態の波動関数で決まる

ベクトル部分 ... Z' は ρ 崩壊 (核子のスピン変化なし、 e^- と ν_e の合成スピン 0)

軸性ベクトル部分 ... カマフ・テラー崩壊 (核子のスピン変化、 e^- と ν_e の合成スピン 1)

電子、 π -トリーの波動関数を平面波で近似して

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{iP \cdot x/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{V}} \left\{ 1 + \underbrace{iP \cdot x/\hbar}_{l=0} + \dots \right\} \quad (17.52)$$

$l=1$ の部分も存在する

$|P| \sim$ 数 MeV, $R \sim$ 数 fm 故 $|P|R/\hbar \sim 10^{-2}$

よって $l=1$ とした遷移 (原子核が軌道角運動量を1だけ持ち出す) は、 $l=0$ とした遷移より 10^{-4} 程度抑制される (行列要素の2乗)

$l=0$ とした崩壊	許容遷移	(l : even \rightarrow 1011 保存 l : odd \rightarrow 1011 反転)
$l=1$	(一重) 禁止遷移	
$l=2$	二重	

許容遷移では、 $\Delta P = 0$ $\Delta J = 0$ ($J \neq 0 \rightarrow 0$)

$\Delta P = 0$ $\Delta J = 0, \pm 1$ (ただし $0 \rightarrow 0$ は X (かマフ.テラ-)

\uparrow $\Delta l = 0$ だが、 $\Delta S = 1$

(禁止遷移の例)

$1^- \rightarrow 0^+$ 許容かマフ.テラ- X

 一重禁止遷移 0

$^{15}In (J^P = \frac{9}{2}^+)$ \rightarrow $^{15}Sn (J^P = \frac{1}{2}^+)$ 4重禁止遷移

超許容遷移

崩壊前後の原子核が同一のアイソスピン多重項に属す
崩壊確率は許容遷移より大きく、自由な中性子のときと同じくらい
(前後で波動関数が変わらない)

例) アイソスピン 3 重項 ($^{14}C, ^{14}N, ^{14}O$) (図 2.6)

$$^{14}_8O_6 \rightarrow ^{14}_7N_7 + e^+ + \nu_e$$

$$0^+ \rightarrow 0^+ \quad (P = 1P_1 \rightarrow n = 1P_1)$$

許容遷移

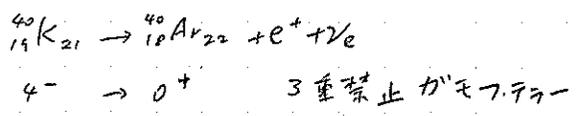
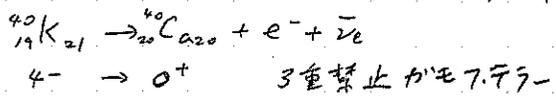
例) $^{14}_6C_8 \rightarrow ^{14}_7N_7 + e^- + \bar{\nu}_e$ (図 2.6)

$0^+ \rightarrow 1^+$ かマフ.テラ-

禁止遷移

重い原子核では中性子数が陽子数より多い → 超許容遷移はできない。

例) 図 17.18 ^{40}Ca ... 2重魔法数, ^{40}K ($p-1d_{3/2}^{-1}, n-1f_{7/2}^{-1}$), ^{40}Ar ($p-1d_{3/2}^{-2}, n-1f_{7/2}^{-2}$)



高い励起状態へのβ崩壊

β崩壊の前後で原子核の質量差が大きく、エネルギー的に許容遷移が可能になる。

例) 図 17.19, $A=99$ の同重体の崩壊。

位相空間は小さいが許容遷移なので行列要素が大きくなり、高励起の娘核になる。
その後強い相互作用により中性子が放出された (遅発中性子放出)

ニュートリノの質量測定

1911 - 70 point

$$K(E_e) = \sqrt{\frac{dN(E_e)/dE_e}{F(Z; E_e) \cdot E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}}} \quad (17.53)$$

$$\frac{dN(E_e)}{dE_e} \propto \frac{dP_{\beta}(E_e, E_e)}{dE_e} = \frac{4\pi^2 V^2}{(2\pi \hbar c)^6} F(Z; E_e) E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} (E_0 - E_e) \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_{\nu}^2 c^4}$$

(17.45) で $Z=11$ の関数による補正を $m_{\nu} \neq 0$ とした。
= 水 4)

$$K(E_e) \propto \sqrt{(E_0 - E_e) \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_{\nu}^2 c^4}} \quad (17.54)$$

図 17.20, $m_{\nu} = 0$ ならば $K(E_e) \propto E_0 - E_e$

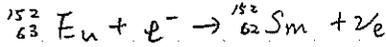
= 水 2) 測定された ν の質量は実際

$$m_{\nu} = \sqrt{\sum_k |U_{ek}|^2 m_k^2} \quad (k = \nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}) \quad (17.55)$$

ν の割合が重たけけされた平均。

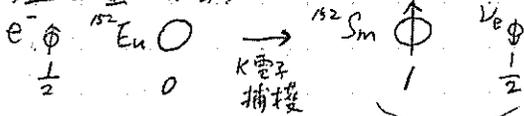
ニユートリ)のヘリシティの測定

ゴールドハ-115 の実験

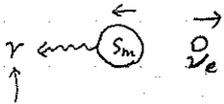


許容かマフ.テラ-

(角運動量の保存)



運動方向も反対 \Rightarrow ヘリシティは同じ



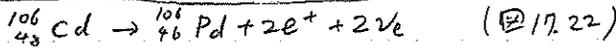
原子核の角運動量を材方

よ2 原子核の運動方向に放出された光子(ニユートリ)のヘリシティは同じ

$$h\nu_e = -1.0 \pm 0.3 \quad (17.56)$$

17.7 2重β崩壊

270のニユートリ)が出た2重β崩壊(22)



この過程は、弱相互作用の2次の効果なので、2次の行列要素

$$M_{fi} = \sum_m \frac{\langle f, 2e^+, 2\nu_e | H_w | m, e^+, \nu_e \rangle \langle m, e^+, \nu_e | H_w | i \rangle}{E_m - \frac{M_i + M_f}{2} c^2} \quad (17.57)$$

m: 中間状態

分母を $(M_i - M_f) c^2 (= E_0)$ と近似すると、分子の原子核部分の m の和は 1 とする。

$$M_{fi} \approx \frac{G_F^2}{E_0 V^2}$$

さらに (15.43) は 4 粒子の位相空間に変更され、

$$\frac{(4\pi)^2 V^2}{(2\pi\hbar c)^6} \frac{E_0}{30} \rightarrow \frac{(4\pi)^4 V^4}{(2\pi\hbar c)^{12}} \frac{E_0''}{2000} \quad (17.58)$$

よ2

$$\frac{1}{P_{2\nu}} \approx \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{G_F}{E_0} \right)^2 \frac{(4\pi)^4}{(2\pi)^{12} (\hbar c)^{12}} \frac{E_0''}{2000} \quad (17.59)$$

ニータリ)を出さない2重β崩壊(0ν)

$$p \rightarrow e^+ + \nu_e + n$$

$$p + \bar{\nu}_e \rightarrow e^+ + n \quad (\text{図 17.23})$$

が同時に起る。1つの ν_e が2つ目で吸収される
これが起る条件は、

- ・ニータリ)はコウナ粒子 (粒子 = 反粒子)
- ・ニータリ)は質量を持つ (左巻きの中に右巻き成分を持つ、10節参照)

(15.49) から

$$\frac{1}{\Gamma_{0\nu}} \approx \frac{2\pi}{h} \frac{G_F^4}{R^4} \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^6 (hc)^6} \frac{E_0^5}{32} (1-\beta_\nu) \quad (17.60)$$

↑
右巻き成分を持つ確率

$1/R^4$ はニータリ)を交換しているとした伝播関数と、原子核の仮想中間状態からくる。

不確定性原理から $R = 5 \text{ fm}$, $p_\nu \approx 40 \text{ MeV}/c$ とする。

$$\Gamma_{0\nu} \approx 4.5 \times 10^{11} (1-\beta_\nu)^{-1} \approx 4.5 \times 10^{11} \cdot 2 \gamma_\nu \text{ (年)} \quad (E_0 = 2 \text{ MeV}) \quad (17.61)$$

$$m_\nu = 1 \text{ eV}, E_\nu = 1 \text{ MeV} \text{ のとき}$$

$$\Gamma_{0\nu} \approx 3 \times 10^{24} \text{ 年} \quad (17.62)$$

図 17.24 2重β崩壊による荷電粒子のスペクトル

(2ν) では、ニータリ)がエネルギーを一部担うため広く分布。

現在のニータリ)の質量の推定値は

$$m_\nu = 0.39^{+0.45}_{-0.34} \text{ eV} \quad (17.65)$$

(0ν)崩壊は標準模型では説明できない → 大統一理論へ。

Titel
Klassenstufe

Name
Datum

Überschrift

Ein großer, leerer rechteckiger Kasten mit einem feinen Gitternetz, der für die handschriftliche Notizen vorgesehen ist.

Ein kleiner horizontaler Kasten am unteren Rand der Seite, der für die Angabe von Details wie der Seitenzahl oder dem Datum vorgesehen ist.

